



MODELO DE OPTIMIZACIÓN ESTOCÁSTICA PARA EXPLOTACIONES MINERAS A CIELO ABIERTO

Giovanni Franco Sepúlveda

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Minas

Medellín, Colombia

2017

MODELO DE OPTIMIZACIÓN ESTOCÁSTICA PARA EXPLOTACIONES MINERAS A CIELO ABIERTO

Giovanni Franco Sepúlveda

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:

Doctorado en Ingeniería – Ciencia y Tecnología de Materiales

Directora:

Gloria Patricia Jaramillo Álvarez, Ph.D.

Codirector:

John Willian Branch Bedoya, Ph.D.

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Minas

Doctorado en Ingeniería – Ciencia y Tecnología de Materiales

Medellín, Colombia

2017

Tabla de contenido

Lista de Tablas	5
Lista de Figuras	6
Nomenclatura general	7
CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN	9
<u>1.1. Trabajos Previos</u>	<u>13</u>
<u>1.2. Problema Específico de Investigación</u>	<u>18</u>
<u>1.3. Objetivos</u>	<u>21</u>
<u>1.4. Contribuciones.....</u>	<u>22</u>
<u>1.5. Organización</u>	<u>23</u>
CAPÍTULO 2. METODOLOGÍA: APROXIMACIÓN AL PLANEAMIENTO MINERO ESTOCÁSTICO.....	25
<u>2.1. Planeamiento Minero Estocástico</u>	<u>25</u>
<u>2.2. Modelo de Bloques y Secuenciamiento Minero.....</u>	<u>27</u>
<u>2.3. Estimación de la Ley de Corte</u>	<u>31</u>

CAPÍTULO 3. MODELO DE OPTIMIZACIÓN ESTOCÁSTICA PARA EXPLOTACIONES MINERAS A CIELO ABIERTO DE UN DEPÓSITO POLIMETÁLICO	42
<u>3.1. Definición del Modelo Propuesto para la Optimización Estocástica de una Explotación Minera a Cielo Abierto</u>	<u>43</u>
<u>3.2. Modelo de Optimización Propuesto</u>	<u>44</u>
CAPÍTULO 4. CASO DE ESTUDIO	68
<u>4.1. Caso de Estudio: Explotación Minera a Cielo Abierto de un Depósito Polimetálico.</u>	<u>68</u>
<u>4.2. Principales resultados de la Optimización.....</u>	<u>77</u>
<u>4.3. Análisis de Resultados:</u>	<u>80</u>
CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES	88
Recomendaciones para el Trabajo Futuro.....	94
ANEXOS.....	96
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	99

Lista de Tablas

Tabla 1. Síntesis de las características y limitantes de los trabajos previos.	15
Tabla 2. Definición de conjuntos. Fuente: (Asad & Dimitrakopoulos, 2013).	37
Tabla 3. Determinación de parámetros o datos del modelo. Fuente: (Asad & Dimitrakopoulos, 2013).	38
Tabla 4. Definición de conjuntos del modelo propuesto	51
Tabla 5. Definición valores que servirán de entrada del modelo propuesto.	54
Tabla 6. Definición variables aleatorias de entrada al modelo propuesto.	55
Tabla 7. Definición de variables de decisión del modelo propuesto.	56
Tabla 8. Definición de variables de decisión dependientes.	58
Tabla 9. Productos u Outputs principales del modelo propuesto.	58
Tabla 10. Datos base del proyecto hipotético.	70
Tabla 11. Valores de entrada utilizados en el modelo propuesto.	77
Tabla 12. Definición de variables aleatorias que se utilizaron de entrada al modelo.	77
Tabla 13. Optimización de @RISK (RISKOptimizer) para el caso de estudio.	78
Tabla 14. Valores del VPN, máximo, mínimo y desviación para el modelo estocástico. El VPN determinístico se encuentra en el Anexo A.	80
Tabla 15. Modelos determinístico y estocástico para la definición del bloque más profundo que se explota en el tiempo t y para la vida la mina (T).	82
Tabla 16. Ley de Corte de procesamiento (Y_p) para la optimización del caso de estudio.	85
Tabla 17. Ley de Corte del material que va a la pila de almacenamiento (Y_s) para la optimización del caso de estudio.	86

Lista de Figuras

Figura 1. Modelo de optimización estocástica de una explotación minera a cielo abierto.....	44
Figura 2. Descripción de proceso extractivo propuesto. Vale la pena aclarar que este proceso puede aplicarse a cualquier tipo de yacimiento mineral.	46
Figura 3. Esquema Básico de los GA + simulación.	50
Figura 4. Secuenciamiento de explotación para los años 1 (verde), 2 (amarillo) y 3 (azul).	61
Figura 5. Variable de decisión $D(t)$ para la explotación del bloque más profundo y los correspondientes bloques pertenecientes a $E(D(t),t)$	61
Figura 6. Proceso extractivo mina hipotética a cielo abierto.	69
Figura 7. Distribución espacial de los bloques a ser explotados en el modelo propuesto.	71
Figura 8. Densidad de probabilidad del VPN del caso de estudio.	78
Figura 9. Comportamiento del VPN para el caso base.	98

Nomenclatura general

$\Delta C^{(+/-)}(p,t)$	Incremento o decremento en capacidad de procesamiento C en el proceso p en t. Puede evaluarse en periodos mayores a t por ejemplo cada 5t.
$\Delta M^{(+/-)}(t)$	Incremento o decremento en capacidad de minado M en t. Puede evaluarse en periodos mayores a t por ejemplo cada 5t.
$\Delta R^{(+/-)}(t)$	Incremento o decremento en capacidad de refinación R en t. Puede evaluarse en periodos mayores a t por ejemplo cada 5t.
B(i)	Conjunto de bloques adyacentes superiores a i para usar en las relaciones de precedencia.
C	Capacidad de procesamiento de la planta.
cp(p)	Costo de procesamiento p.
C(p,t)	Capacidad de procesamiento del proceso p en t.
CEST(t)	Costo de enviar a estéril en t
CFLOT	Costos de flotación colectiva.
CINCC(p) / CDECC(p)	Costos de incrementar y costos de desmontar capacidad de proceso p.
CINCM / CDECM	Costos de incrementar y costos de desmontar capacidad de mina.
CINCR / CDECR	Costos de incrementar y costos de desmontar capacidad de refinación.
Co (p)	Capacidad inicial de procesamiento del proceso p.
CPALM(t)	Costo de almacenar en pila en t
Cs	Costo de enviar a pila de almacenamiento.
Csp	Costo de enviar de pila de almacenamiento a proceso.
Cw	Costo de enviar al estéril.
d	Tasa de descuento.
D(t)	Bloque más profundo que se explota en t
EL	Numero de escenarios de ley
f	Costos fijos por periodo t
F	Costos de oportunidad
FL	Capacidad de flotación
$g_s(k,t)$	Ley del mineral k almacenado en la pila (cambia a medida que va almacenando nuevo material) al periodo t
i	Bloque.
IP(t)	Cantidad de material almacenado en pila en t.
m	Costo de minado.
m(i)	Costo de explotar o minar el bloque i.
M(t)	Capacidad de mina en t.
Mo	Capacidad inicial de minar.
N	Número de bloques
k	Mineral (en depósitos polimetálicos).
P(t)	Utilidad por periodo t.
p	Indicador de proceso.

$pr(i,t)$	Bloque i que se envía directamente a proceso en t .
$Q_c(p,t)$	Cantidad de mena procesada en el proceso p durante el periodo t .
$Q_m(t)$	Cantidad de material minado durante el periodo t .
$Q_r(t)$	Cantidad de material refinado durante el periodo t .
Q_s	Capacidad de la pila de almacenamiento (Máximo pila de almacenamiento del inventario).
Q_w	Capacidad del estéril (tamaño máximo del pit).
r_e	Costo de refinación.
$r(k)$	Costo de flotación selectiva del mineral k .
$R(t)$	Capacidad de refinación en t .
R_o	Capacidad inicial de refinación.
$RFS(k,t)$	
$rw(t)$	Cantidad que se envía desde la última etapa del proceso a relave en t .
$S(k,t)$	Precio del mineral k en t . Pronóstico a partir de ajuste de un modelo de serie de tiempo a datos históricos.
$s(i,t)$	bloque i que se envía a pila de reserva en t .
$Sp(t)$	Cantidad de material almacenado en pila que se envía a proceso en t .
t	Indicador de periodo (año).
T	Vida útil de la mina (rentable).
TT	Horizonte de análisis
$v(i)$	Cantidad de material del bloque i .
$w(i,t)$	Bloque i que se envía a estéril en t directamente de la mina.
$W(t)$	Cantidad de estéril almacenado en botaderos en t .
$x(i,t)$	Bloque i que se explota en t .
y	Porcentaje de recuperación.
$y(p)$	Factor de recuperación del proceso p .

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

Tradicionalmente, el planeamiento minero de una explotación de recursos minerales tiene como objetivo maximizar la utilidad del proyecto minero. Con frecuencia, se han utilizado técnicas de planeamiento que, aunque permiten maximizar los beneficios de dicha explotación, hacen supuestos poco realistas y no valoran el riesgo y la incertidumbre necesarios para un óptimo proceso de planeamiento minero, dadas las características especiales que tiene todo yacimiento mineral (presencia de incertidumbres geológicas, de mercado, ambientales, tecnológicas, entre otras).

En la actualidad, en la literatura técnica sobresalen tres modelos con los cuales se define el planeamiento minero. El primero, es el modelo del planeamiento minero determinístico; el segundo, el modelo del planeamiento minero como una función del dinero que optimiza procesos; y en tercer lugar, el modelo de planeamiento minero estocástico. Para el objetivo de esta investigación, se entiende por planeamiento minero, el proceso de determinación temporal de largo plazo y que puede ser entendido como planeamiento minero estratégico.

En primer lugar, el modelo determinístico, a partir de unas entradas conformadas fundamentalmente por: modelo geológico (recursos y reservas); infraestructura (limitaciones y oportunidades); finanzas (inversiones; precios y costos); escenarios operativos (reservas; leyes de corte, y niveles de extracción o explotación); datos

operativos (relación estéril/mineral; dotaciones y equipos – maquinaria), dan como resultado unas salidas del planeamiento minero y que comprenden: los límites del pit, la curva tonelaje-ley (para el caso de la explotación de un yacimiento metálico), la vida de la mina, el flujo de caja del proyecto minero, entre otros.

En segundo lugar, el modelo de planeamiento minero en función del dinero que optimiza procesos (Martínez & McKibben, 2010), se fundamenta en la realización de una optimización simultánea de la cadena de extracción-procesamiento-refinación (producción) que conlleve a un incremento en el Valor Presente Neto (VPN) del negocio minero, teniendo en cuenta toda la cadena de valor del negocio minero, desde la definición de los recursos y reservas mineras (que son parte de las entradas), hasta finalmente llegar al mercado (que es parte de las salidas). Los principales elementos en los cuales se define este modelo se denominan optimización integrada y con logística. Como resultado de esta optimización se incrementa, en la mayoría de los casos, el VPN del negocio minero, pero sin tener en cuenta el riesgo ni la incertidumbre. Adicionalmente, dicha optimización se basa en el modelo de la teoría de las restricciones y en la identificación de los cuellos de botella de la cadena productiva del negocio minero (Whittle, 2012); (King, 2011).

Finalmente, el modelo estocástico se apoya en la inclusión del análisis de la incertidumbre asociada a lo geológico, el mercado y los precios, entre otros. Es válido anotar que en minería todos los procesos tienen asociada incertidumbre pero algunos modelos no la consideran; uno de los objetivos que se define en esta investigación, es considerar las incertidumbres geológicas y de mercado. Dicha incertidumbre puede representarse por medio de series de tiempo y distribuciones de probabilidad ajustadas a partir de datos históricos o de exploraciones, o a través de posibles escenarios

(Darling, 2011), (Whittle, 2012), (Franco, et al., 2012) y (Dimitrakopoulos, 2010). En un modelo de planeamiento minero estocástico también se intenta maximizar una función objetivo (generalmente el VPN, que puede ser la salida) sujeto a unas restricciones (que pueden ser de capacidad de extracción, mina, pilas de almacenamiento, planta, entre otras), incluyendo las respectivas funciones de distribución de probabilidad de las variables que se consideran inciertas (definidas como entradas). Este modelo se basa entre otros en las siguientes entradas: un modelo de recursos (modelo de bloques); y un diseño de opciones de explotaciones mineras y optimizadas a la luz de los objetivos definidos para cada empresa minera.

En el modelo estocástico, al considerar el riesgo (v.g., técnicos, de mercado y tecnológicos), no sólo se es más realista, sino que se tienen resultados más confiables (teniendo en cuenta que son modelos que tratan de incluir variables y parámetros que en modelamiento minero tradicional se dejan de lado); se puede hacer un análisis muy completo de, no sólo cuál es el escenario promedio, sino a qué otros escenarios pesimistas puede estar expuesto el proyecto minero que pueden ser de graves consecuencias y quizás, preferiría no exponerse a ellos; o lo contrario, qué oportunidades (escenarios optimistas) está dejando de considerar o tener en cuenta.

Diversos investigadores han hecho propuestas muy interesantes de este tipo de modelo. Sin embargo, definir bajo este enfoque el planeamiento de una explotación minera a cielo abierto, especialmente para depósitos polimetálicos (aquellos en donde es posible explotar económicamente más de un mineral), aún es un reto debido a la cantidad de variables (inciertas) que deben ser tenidas en cuenta para lograr extraer del subsuelo la mayor cantidad de mineral(es) económicamente explotable(s) y en condiciones ambientalmente sostenibles. Esto conlleva alta complejidad matemática al

incluir altas no linealidades (entendidas como las relaciones entre las variables y los parámetros), alto costo computacional y la necesidad de considerar análisis de riesgos que no es trivial.

En los modelos tradicionales que no consideran incertidumbre, autores como (Newman, et al., 2010) (Asad & Dimitrakopoulos, 2013); (Koushavand, 2014) y (Montiel, et al., 2014), entre otros, ya han avanzado en esa aproximación aunque dejan aun un campo de investigación para intentar dar respuesta a las preguntas sobre las consideraciones ambientales, la incertidumbre geológica, la incertidumbre tecnológica, de costos y de precios que son altamente variables en el tiempo, y sobre el manejo de la dificultad computacional que conllevaría estas inclusiones, como se describirá más adelante.

Algunas de esas aproximaciones estocásticas usan herramientas de optimización “duras” para la optimización estocástica explícita (Birge & Louveaux, 1997), con las cuales por su alto costo computacional es impráctico considerar demasiadas complejidades. Las herramientas llamadas “blandas” como las metaheurísticas (Algoritmos Genéticos - GA por sus siglas en inglés, Colonia de Hormigas, Búsqueda Tabú, entre otras), que son basadas en Inteligencia Artificial y no tienen un soporte matemático “ortodoxo”, logran conseguir, desde un punto de vista práctico, soluciones cuasi-óptimas con costos computacionales menores y que, sí se integran con técnicas de simulación, permiten hacer completos análisis de la estocasticidad de muchas variables (este último enfoque es denominado optimización estocástica implícita).

Teniendo en cuenta lo anterior, se propone un modelo que haga uso de herramientas metaheurísticas y simulación y que aporte respecto a los modelos encontrados en la literatura especializada para resolver el problema del planeamiento minero a cielo abierto.

El problema de la optimización del planeamiento estocástico, puede subdividirse en tres subproblemas como lo son: el modelo geológico, el planeamiento minero y el cargue y transporte. Debido a los alcances de esta investigación, se analizará el subproblema del planeamiento minero en la optimización minera estocástica, alrededor del cual se desarrollará un modelo para la planeación óptima de una mina a cielo abierto de un depósito polimetálico identificando las variables fundamentales y sus incertidumbres asociadas, con la meta de maximizar los beneficios esperados y minimizar los riesgos asociados al proceso de planeamiento minero.

1.1. Trabajos Previos

Los modelos de optimización estocástica para explotaciones a cielo abierto en depósitos metálicos o polimetálicos, se han convertido en los últimos años en un área de investigación activa. Se clasifican en cuatro grandes líneas de investigación.

La primera, el modelo de bloques (la forma de extraer los bloques de material de interés (*ore*) y los bloques de estéril (*waste*) y secuenciamiento minero; la segunda, la estimación de la Ley de Corte (*Cut-off Grade*); la tercera, la incertidumbre asociada al

planeamiento minero, por último, la determinación y definición de las pilas de almacenamiento (*stockpile*).

Los autores que han desarrollado los principales avances en las líneas mencionadas anteriormente, se describen a continuación:

- a. Modelo de bloques y secuenciamiento minero (Lerchs & Grossmann, 1965), (Dimitrakopoulos, 1998), (Weintraub, et al., 2008), (Boland, et al., 2009), (Jélvez, et al., 2016), (Saavedra-Rosas, et al., 2016), (Morales & Reyes, 2016) entre otros.
- b. Estimación de la Ley de Corte (Lane, 1964); (Lane, 1988); (Nieto & Bascetin, 2006); (Asad & Dimitrakopoulos, 2013); (Rendu, 2014), entre otros.
- c. Incertidumbre asociada al planeamiento minero (Dimitrakopoulos, et al., 2007) (Abdel & Dimitrakopoulos, 2010); (Abdel-Sabour & Dimitrakopoulos, 2011); (Botin, et al., 2011); (Botin, et al., 2013); (Botin, et al., 2015); (Montiel, 2014); (Arroyo, et al., 2014); (Nieto, et al., 2014), entre otros.
- d. Determinación de las pilas de almacenamiento (Asad, 2005); (Montiel & Dimitrakopoulos, 2013); (Nieto, et al., 2013), entre otros.

En la Tabla 1, se presenta una síntesis de las características y limitantes de los trabajos previos más sobresalientes, aunque en el capítulo 2 se ampliará en el estado del arte.

Referencia	Tiene en cuenta la incertidumbre (Geológica y de Mercado)	Característica	Limitante
(Lane, 1964) y (Lane, 1988)	NO	Define el modelo clásico para la estimación de la Ley de Corte. Deja de lado las variables ambientales.	Utiliza una Ley de Corte constante en la vida de la mina.
(Asad, 2005)	NO	Determina un algoritmo para la definición de la Ley de Corte utilizando pilas de almacenamiento y aplicado a dos minerales económicamente explotables. Deja de lado las variables ambientales.	Da respuesta en el mundo de lo determinístico al problema de la estimación de la leyes de corte para dos minerales.
(Asad & Dimitrakopoulos, 2013)	NO	Emplea restricciones de capacidad constantes tanto en mina, planta y refinación. Deja de lado las variables ambientales.	El algoritmo está en función de un solo mineral. Utiliza el sistema de costos tradicional.
(Rendu, 2014)	NO	Se fundamenta en el modelo definido por Lane y recomienda tener en cuenta variables ambientales, políticas, sociales y económicas para la estimación de la Ley de Corte (aunque en el desarrollo de su modelo solamente tiene en cuenta variables técnicas y geológicas). Deja de lado las variables ambientales.	No tiene en cuenta el riesgo ni la incertidumbre en la estimación de la Ley de Corte.
(Koushavand, 2014)	Parcialmente	Considera el costo de la incertidumbre de la ley en función del planeamiento de la extracción. Tiene en cuenta los efectos lineales y no lineales de la incertidumbre de la ley en el planeamiento minero a largo plazo. Desarrolla un modelo de Programación lineal entera mixta que maximiza el VPN y minimiza el costo de la incertidumbre de ley considerando una pila de almacenamiento. Implementa un modelo de optimización cuadrática teniendo en cuenta la incertidumbre de la ley en un plan minero a largo plazo. Deja de lado las variables ambientales.	No se tiene en cuenta en el modelo propuesto la incertidumbre del tipo de roca. Se hace necesaria una mejor técnica de agrupamiento en la cual la incertidumbre de la ley deberá considerarse. El factor de recuperación y el costo de procesamiento deberán depender de la ley de entrada.
(Montiel, 2014)	Parcialmente	Desarrolla un modelo para optimizar un complejo minero que considera simultáneamente diferentes componentes y cantidades para la incertidumbre geológica, entendiendo por incertidumbre geológica la incertidumbre relacionada con la ley y los tipos de material para un depósito mineral en estudio. Esta incertidumbre es modelada por medio de simulaciones geoestadísticas de diferentes depósitos. Deja de lado las variables ambientales.	No tiene en cuenta otras fuentes de incertidumbre como el mercado, el medio ambiente, opciones de inversión y restricciones operacionales tales como movilidad, perforación y voladura y alternativas de localización de la infraestructura.
(Zhang, 2014)	NO	Determina la evaluación de una mina de oro con incertidumbre en el precio y flexibilidad operacional. Adicionalmente, define la Ley de Corte económica para una mina metálica con dos minerales de interés, y un modelo teórico para las pilas de almacenamiento y procesamiento para una ley intermedia. Deja de lado las variables ambientales.	Deja de lado la incertidumbre geológica.

Tabla 1. Síntesis de las características y limitantes de los trabajos previos.

En los trabajos previos, la solución al problema de planeamiento minero es una tarea poco trivial, en la cual las principales limitantes que se encuentran en la mayoría de propuestas de desarrollo o solución es que siguen utilizando métodos tradicionales para la toma de decisiones, dejando de lado variables que son importantes a la hora de llevar a cabo un planeamiento minero que tenga en cuenta el riesgo y la incertidumbre propios de todo proyecto minero, desde la definición del modelo de bloques hasta la determinación de las pilas de almacenamiento, pasando por la estimación de la Ley de Corte.

En términos generales teniendo en cuenta la literatura revisada (consolidada en la Tabla 1 lo más sobresaliente) aún quedan pendientes algunas preguntas abiertas, respecto a: ¿Cómo incluir la incertidumbre geológica, de costos y de precios que son altamente variables en el tiempo?; ¿Cómo incluir el cambio tecnológico?, ¿Cómo incluir variables ambientales? y ¿Cómo manejar la dificultad computacional que conllevaría estas inclusiones?

Resulta importante entonces, enfrentar el desafío a la hora de optimizar la Ley de Corte de un depósito polimetálico considerándola variable en el tiempo (pues depende de precios inciertos y variables en el tiempo), teniendo en cuenta incertidumbre geológica y restricciones de capacidad variables (mina, planta y refinación) (que permiten la inclusión de desarrollo tecnológico). Esta investigación se convierte en una propuesta ambiciosa, con lo cual se intenta proponer una solución alterna al problema del planeamiento minero desde un enfoque basado en planeamiento minero estocástico.

Los diferentes programas que se encuentran en minería para llevar a cabo procesos de optimización, tienen tres elementos fundamentales del planeamiento minero determinístico: El primero incrementar el VPN. El segundo reducir costos y por último,

mejorar las productividades. *COMET*, *Whittle*, *Hexagon Mining* son algunos de los más importantes programas para la optimización de las explotaciones mineras.

1.2. Problema Específico de Investigación

En general, los modelos de planeamiento minero tradicional de una explotación a cielo abierto continúan tratando de maximizar la rentabilidad de la explotación de un depósito polimetálico usando como indicador el mayor Valor Presente Neto (VPN), estableciendo criterios *Ceteris Paribus*, es decir, se mantienen constantes todas las variables de interés (precio, costos, tasa de explotación, Ley de Corte, tasa procesamiento, entre otras), se considera certidumbre geológica y como variable de decisión, única y exclusivamente, aquella variable que se quiere estudiar o analizar (vida de la mina o la Ley de Corte, entre otras).

En esta tesis se aborda la solución al problema de optimización anteriormente descrito, pero utilizando modelos de optimización estocásticos (implícitos o “blandos”), que permitan considerar la incertidumbre asociada a las variables de interés, con el objetivo de maximizar los beneficios esperados y minimizar los riesgos asociados al planeamiento de la actividad minera.

Se define en esta tesis como modelo de optimización estocástica, como un modelo de optimización (mathematical program) en el cual algunos de los parámetros (en la función objetivo o restricciones) son variables aleatorias. Con base en lo definido hasta el momento, vale la pena realizar las siguientes preguntas:

- a. Teniendo en cuenta el agotamiento de los recursos minerales de buena calidad, *¿de qué forma se pueden realizar diseños y planeamientos mineros que mitiguen el impacto que tiene la explotación de reservas marginales y al mismo tiempo aumenten las reservas probadas del mineral de interés?*
- b. De acuerdo con las metodologías existentes para el proceso de diseño y planeamiento minero, *¿cómo tienen en cuenta o evalúan el riesgo y la incertidumbre para lograr un incremento en la vida de la mina?*
- c. Asumiendo que, generalmente, los planes de producción minera se llevan a cabo con técnicas determinísticas (v.g. Programación lineal), *¿Es factible mediante técnicas meta heurísticas, llevar a cabo el diseño y planeamiento minero de una explotación de un depósito polimetálico a cielo abierto con el objetivo de aumentar el VPN del negocio minero minimizando su riesgo?*

En esta tesis se define el término meta heurísticas, algoritmos genéticos y programación estocástica implícita, tal como se establece a continuación:

Metaheurísticas: La palabra heurística viene del griego “Heuriskien” que significa descubrir. En Inteligencia artificial las Metaheurísticas son algoritmos que permiten descubrir una solución óptima de problemas de optimización complejos (no linealidades, ecuaciones dinámicas, entre otros) mediante múltiples ensayos de posibles soluciones siguiendo estrategias basadas en los descubrimientos hechos a lo largo de la búsqueda y una mezcla entre explotación (concentrarse alrededor de buenas soluciones encontradas) y exploración (buscar a lo ancho de la zona de soluciones factibles en zonas no exploradas aun en la búsqueda) por lo que, aunque no garantizan encontrar una solución óptima, proveen muy buenas respuestas a un costo

computacional razonable. Para evaluar la calidad de una posible solución no se basa en gradientes sino solo en la evaluación de la función objetivo y del cumplimiento de las restricciones, por lo que permite funciones altamente no lineales, dinámicas, operadores AND, OR, entre otros, sumatorias con indicadores dinámicos, entre otros. Además, las soluciones pueden representarse de múltiples formas (valores binarios, enteros, reales, selección de cubos, nodos, arcos, formas heterogéneas y cambiantes, entre otros). Entre las metaheurísticas más conocidas están los algoritmos genéticos AG o GA, la búsqueda tabú TS, el enfriamiento simulado SA, la colonia de hormigas ACO y enjambre de partículas PSO, entre otros.

Algoritmos genéticos AG: Son algoritmos poblacionales (buscan simultáneamente en varias soluciones en una “generación”) de optimización que se basan en el mecanismo de la selección natural de los seres vivos para buscar a través del espacio de decisión, soluciones óptimas. *Lo que el algoritmo hace es encontrar la combinación óptima de genes (posibles valores de las variables de decisión), utilizando para ello la experiencia adquirida en las iteraciones anteriores.* En la búsqueda, se enfoca en las buenas características encontradas para “propagarlas” en el resto de la búsqueda y así mejorar de generación en generación hasta que el proceso converja, es decir, no logre mejorar. Malas características desaparecen “genéticamente”. Los AG son las metaheurísticas más usadas y aplicadas por su alto desempeño en un gran número de problemas difíciles de optimización.

Programación estocástica implícita: La programación u optimización estocástica corresponde a un problema de optimización en el que algunos de sus parámetros son variables aleatorias, cuyas funciones de distribución de probabilidad son conocidas. Como estas funciones son no lineales, es muy difícil resolverlo con algoritmos tradicionales y en tiempos razonables.

La simulación de Montecarlo es un método no determinista de evaluación de muchos posibles escenarios y posibles decisiones, relacionados mediante ecuaciones complejas y costosas computacionalmente de evaluar. El método genera eventos aleatorios que siguen las funciones de distribución de cada variable aleatoria y para cada combinación de eventos calcula los resultados de las ecuaciones que desea evaluar como salida. Este mecanismo aporta múltiples posibles resultados “sintéticos” de la variable de salida lo que permite caracterizarla estadísticamente. La simulación como tal no es un método de optimización, pero puede combinarse con metaheurísticas para lograr resolver problemas complejos de optimización estocástica. Este método híbrido se denomina Programación estocástica implícita: la metaheurística ensaya posibles decisiones y la simulación de Montecarlo evalúa su desempeño ante multiplicidad de posibles eventos aleatorios. Algoritmos genéticos ha sido la metaheurística más usada en este método pero es posible usar cualquier otra metaheurística hibridizada con simulación de Montecarlo.

1.3. Objetivos

Objetivo General

Desarrollar un modelo para la planeación óptima de una explotación minera en depósitos polimetálicos considerando la incertidumbre asociada a variables de interés, con el fin de maximizar los beneficios esperados y minimizar los riesgos asociados.

Objetivos Específicos

- a. Identificar las variables claves (precios, costos, secuenciamiento minero, modelo de bloques, leyes de corte, entre otras) y las incertidumbres asociadas a ellas en el proceso de planeación minera estocástica.
- b. Formular un modelo de optimización bajo incertidumbre que mitigue el riesgo asociado y maximice los beneficios, y demás objetivos que tendrá la planeación minera.
- c. Desarrollar un algoritmo de solución al modelo de optimización estocástica mediante la combinación de técnicas de optimización y simulación.
- d. Aplicar el modelo propuesto a un depósito polimetálico de una explotación minera a cielo abierto para un caso real.

1.4. Contribuciones

Con esta tesis se pretende aportar, desde la optimización minera estocástica, nuevos elementos básicos para ser aplicados en una explotación minera a cielo abierto de depósitos polimetálicos.

La geología se considera incierta; los precios y costos son también inciertos y variables en el tiempo, por lo que deben pronosticarse a partir de datos históricos o evaluación de expertos; la tecnología puede cambiar (mejorando la eficiencia o comprando más maquinaria) o permite la decisión de vender capacidad tecnológica que se esté subutilizando.

A su vez, las variables de decisión serán las leyes de corte dinámicas en el tiempo, la vida útil (rentable) de la mina (a diferencia de muchos modelos que la consideran conocida a priori), y la inclusión de pilas de almacenamiento provisional en espera de precios rentables para su procesamiento; todo esto incluido en una estructura de cadena de valor que va desde el depósito hasta el mercado final de los metales.

Como el costo computacional es muy alto, es importante observar que existen progresos muy significativos en los últimos años en lo referente a optimización en minería (se evidencian estos progresos en los trabajos desarrollados por (Weintraub, et al., 2008), (Boland, et al., 2009), (Jélvez, et al., 2016), (Saavedra-Rosas, et al., 2016), (Morales & Reyes, 2016) entre otros), se aportará en mecanismos de reducción de variables de decisión y de restricciones, en la solución del modelo desde la Inteligencia Artificial integrando un modelo de simulación de Montecarlo a un Algoritmo Genético (aunque el modelo podría resolverse con cualquier otra metaheurística), logrando así un avance en la confrontación a las complejidades de la planeación de la explotación a cielo abierto de un depósito polimetálico.

1.5. Organización

Durante la estructuración teórica y metodológica de esta investigación se formularon los siguientes capítulos: En el Capítulo 2, se consideran los elementos principales desarrollados en esta tesis, como lo son, la metodología en el planeamiento minero estocástico, el modelo de bloques y secuenciamiento minero y la estimación de la Ley de Corte. En el Capítulo 3, se describe el modelo de optimización estocástica de

una explotación minera a cielo abierto. En el Capítulo 4, se valida el modelo propuesto en un caso de estudio hipotético (con base en uno real) de un proyecto minero a cielo abierto que explota tres minerales de interés, Cobre, Molibdeno y Oro. Finalmente, en el Capítulo 5, se enumeran las conclusiones y las recomendaciones para el trabajo futuro.

CAPÍTULO 2. METODOLOGÍA: APROXIMACIÓN AL PLANEAMIENTO MINERO ESTOCÁSTICO

El presente capítulo tiene por objetivo definir el marco teórico realizando una aproximación al planeamiento minero estocástico. En primer lugar, se lleva a cabo una aproximación teórica y temporal al concepto del planeamiento minero estocástico. En segundo lugar, se describen algunos elementos sobre el modelo de bloques y secuenciamiento minero y su desarrollo como línea de investigación en planeamiento minero. En tercer lugar, se presenta algunos modelos importantes como el modelo desarrollado por *Lane* en 1964 y en 1988 para la estimación de la Ley de Corte o el modelo desarrollado por *Asad y Dimitrakopoulos* en 2013. Finalmente, se presentan algunas deficiencias o debilidades de los modelos actuales del planeamiento minero desde el punto de vista de la incertidumbre y la valoración del riesgo.

2.1. Planeamiento Minero Estocástico

El planeamiento de una explotación minera establece sus orígenes en 1931 cuando *Hotelling* (*Hotelling*, 1931) en su trabajo sobre la *Economía de los recursos agotables*,

se preocupa por determinar la senda de explotación y los precios que tendrá el recurso mineral a explotar a lo largo de la vida de la mina. Luego, en los años 60's (Lerchs & Grossmann, 1965) con su trabajo *Diseño óptimo de minas a cielo abierto*, determinan la manera en la cual deben extraerse de un yacimiento los bloques de mineral y estéril, con el fin de hacer rentable cualquier explotación minera, teniendo como lineamiento la maximización de los beneficios económicos y financieros. Al mismo tiempo (Lane, 1964) publica en su trabajo *Selección de la Ley de Corte óptima* las bases para la estimación de la Ley de Corte para un depósito mineral y es hasta 1988 cuando el mismo Lane establece el modelo para la definición económica de mineral, en el cual se puede determinar la Ley de Corte de un depósito mineral teniendo en cuenta tres procesos a saber: mina, procesamiento y refinación o mercado.

Los anteriores trabajos, dan respuesta al problema del planeamiento minero desde el punto de vista del determinismo, es decir, no tienen en cuenta la incertidumbre, ni geológica (propia de todo yacimiento mineral) ni la incertidumbre de mercado (asociada a los cambios en los precios y los costos de explotación de los recursos minerales), ni la incertidumbre tecnológica (debido a los avances en los procesos de extracción minera, de procesamiento de minerales y de refinación de minerales, a pesar que día tras día se hace necesario explotar depósitos con bajas leyes, dado su agotamiento producto de años de explotación).

Solamente hasta finales de la década de los años 90's Denby y Shofield (Denby & Schofield, 1995), intentan solucionar el problema determinístico utilizando técnicas heurísticas y metaheurísticas, que ofrecen un acercamiento más real al momento de encontrar soluciones al complejo mundo del planeamiento minero. Es hasta la primera década del Siglo XXI, que diversos autores, se preocupan por encontrar y definir

algoritmos que resuelvan el problema del planeamiento minero estocástico desde la perspectiva del secuenciamiento minero y de la estimación de la Ley de Corte en la cual deberá explotarse un yacimiento mineral maximizando el VPN.

Desde el punto de vista de lo estocástico, para determinar a partir del planeamiento minero la Ley de Corte que haga óptima la explotación minera, se han motivado a autores como (Dimitrakopoulos, 2011), (Asad & Dimitrakopoulos, 2013), (Botin, et al., 2013), (Nieto & Zhang, 2013), (Montiel & Dimitrakopoulos, 2013), entre otros, a explorar y definir algoritmos y métodos alternativos que tengan en cuenta la variabilidad e incertidumbre geológica de los depósitos minerales metálicos, la incertidumbre de mercado (vía la estimación de precios y costos de explotación) y aún pocos se han preocupado por incluir y relacionar las variables ambientales y la incertidumbre asociada al cambio tecnológico.

2.2. Modelo de Bloques y Secuenciamiento Minero

Existen dos problemas clásicos en cuanto al planeamiento minero se refiere, el primero el problema del diseño del pit final el cual se puede definir como el contorno o región resultante de la extracción de un volumen de material que representa el mayor beneficio económico bajo ciertas restricciones de estabilidad geotécnica -ángulo del pit - (Weintraub, et al., 2008), (Boland, et al., 2009), (Jélvez, et al., 2016), (Saavedra-Rosas, et al., 2016), (Morales & Reyes, 2016), (Bastante, et al., 2004), y el segundo, el problema de la secuencia óptima de explotación minera, el cual, consiste en identificar qué bloque de roca dentro de los límites del pit final debe ser explotado y en qué periodo de tiempo de la vida de la mina, de tal forma, que maximice el valor presente neto de

la explotación, sujeto a restricciones físicas y económicas (Sattarvand, 2009), (Lamghari & Dimitrakopoulos, 2012).

El primero ha sido extensamente estudiado; en el año 1965, *Lerchs y Grossmann* en su escrito titulado “*Optimum design of open-pit mines*” describen dos métodos numéricos para resolver el problema del diseño del pit final; el primero es un algoritmo simple de programación dinámica para dos dimensiones y el otro un algoritmo gráfico más elaborado, para tres dimensiones (Hustrulid, et al., 2013). Igualmente se determinó que el pit final se puede comprender como el problema de establecer el cierre de una gráfica con una masa total máxima (Vallejo, et al., 2010). Anteriormente, (Picard, 1976), encontró que este problema se puede resolver usando un algoritmo de flujo de red máximo.

Diferentes métodos se han estudiado para resolver el problema de la secuencia óptima de explotación, siendo este un problema complejo debido al número de variables y a las restricciones del problema (operacionales); comenzando con el modelo de programación lineal entera mixta presentado por Gershon en 1983, diferentes acercamientos se han propuesto para resolver este modelo como los presentados por Dagdelen y Johnson (1986) y Caccetta, Kelsey, y Giannini (1998), los cuales usan parametrización lagrangiana para incorporar restricciones de producción y procesamiento dentro de la función objetivo. Más tarde Caccetta y Hill (2003) proponen una técnica de ramas y límites para resolver el problema y Dowd y Onur (1993) y Onur y Dowd (1993) formulan el problema como un modelo de programación dinámica (Marinho, 2013), (Soleymani & Sattarvand, 2015).

(Lerchs & Grossmann, 1965) y (Caccetta & Hill, 1999), introducen el concepto de análisis paramétrico con el objetivo de generar una secuencia de extracción, usando un modelo sin descuento y varían el valor económico de cada bloque i desde c_i a $(c_i - \lambda)$

para valores de $\lambda \geq 0$ (En este caso c_i corresponde al VPN de explotar el bloque i). Al generar un crecimiento o decrecimiento secuencial de λ se producen una serie de pits anidados los cuales son usados para diseñar la secuencia de explotación.

Más adelante, se presenta una versión modificada del algoritmo *Lerchs-Grossmann* que permite generar una serie de pits anidados en un solo paso sin necesidad de correr la optimización varias veces para diferentes valores del parámetro.

En 1994 *Dowd* profundiza en el concepto de riesgo en los proyectos mineros reforzando la importancia que tienen las simulaciones estocásticas para un apropiado análisis del riesgo y es solo en el año 2002 cuando *Dimitrakopoulos* discute y presenta las consecuencias de tener como entrada para una “función de transferencia no lineal” (secuenciamiento minero) un modelo estimado del depósito, concluyendo que los modelos determinísticos para resolver el problema de secuenciamiento minero ignoran la incertidumbre inherente del problema llevando a evaluaciones engañosas y erróneas; es por eso que en la pasada década versiones estocásticas del problema han atraído la atención de un creciente número de investigadores (Lamghari & Dimitrakopoulos, 2012), (Marinho, 2013).

En el 2004 *Godoy* y *Dimitrakopoulos* presentaron un modelo de optimización estocástico basado en el recocido o enfriamiento simulado (*Simulated Annealing*) que se puede acomodar a la utilización de múltiples representaciones del depósito simulado, el cual mostró una mejora del 28% en el flujo de caja generado por el modelo estocástico de secuenciamiento versus a un modelo convencional para un yacimiento de oro. *Leite* y *Dimitrakopoulos* (2009) usaron una variación de mismo método para optimizar la secuencia de explotación de una mina de cobre reportando resultados similares (Albor Consuegra & Dimitrakopoulos, 2009).

El problema del secuenciamiento minero también se ha trabajado desde el punto de vista de las metaheurísticas; un ejemplo de esto es el trabajo desarrollado por *Denby y Schofield* (1994), donde se describe la aplicación de un algoritmo genético para solucionar el problema, siendo la mayor ventaja de éste método la habilidad de resolver el problema del pit final y del secuenciamiento simultáneamente (Soleymani & Sattarvand 2015). *Albor y Dimitrakopoulos* (2010) integran el diseño de las fases o pushback en el marco de la optimización estocástica considerando la influencia del número y el tamaño de fases que tiene sobre los perfiles de riesgo de la programación de la tasa de extracción (Goodfellow & Dimitrakopoulos 2012). En 2012, *Benndorf y Dimitrakopoulos* desarrollaron una programación estocástica entera que considera la incertidumbre geológica de múltiples elementos demostrando que la programación estocástica entera puede ser implementada en la optimización de la extracción (secuenciamiento) donde se vean involucrados múltiples pits; este modelo fue aplicado a la programación de la explotación de una mina de hierro (Benndorf & Dimitrakopoulos, 2013), (Soleymani & Sattarvand, 2015).

A partir de lo anterior se puede deducir que el problema de hallar el pit final óptimo y el secuenciamiento de este de tal forma que se obtenga el mayor valor presente neto, ha sido un área de investigación ampliamente estudiada y analizada desde diferentes puntos de vista, desarrollándose diversos modelos para resolverlo, siendo los modelos que implementan un enfoque estocástico los que hasta el momento han encontrado resultados más realistas.

2.3. Estimación de la Ley de Corte

La Ley de Corte determina el tonelaje y la ley promedio de material procesado y es crítico en la determinación de la factibilidad económica de un proyecto minero. Todas las consecuencias de selección de la Ley de Corte deben ser tenidas en cuenta, incluyendo las técnicas, económicas, legales, ambientales, sociales y políticas. Importantes contribuciones se han dado en la manera de calcular la Ley de Corte, los cuales han evolucionado de manera horizontal con el cambio que progresivamente ha experimentado la concepción del negocio minero a través del tiempo.

En términos generales, se define la Ley de Corte como la cantidad mínima de producto explotable o mineral que una tonelada de material debe contener antes de ser enviada a la planta de procesamiento. Esta definición es utilizada para diferenciar el material que no debe explotarse o debe llevarse a botaderos de aquel que debe ser procesado y posteriormente refinado para su comercialización y venta. La maximización del VPN en la operación minera influye de forma directa sobre los planes de extracción de una mina debido a su dependencia con la Ley de Corte y de esta manera maximizar el valor del negocio minero conlleva al cambio del tiempo de vida de la mina en el planeamiento a largo plazo.

Cuando se pretende determinar la Ley de Corte de una operación minera, se deben tener en cuenta, entre otros aspectos, los siguientes (Rendu, 2014):

- a. Punto de equilibrio de la Ley de Corte, es decir, aquel valor en el cual los ingresos por comercialización y venta de los minerales de interés son iguales a los costos de extracción, procesamiento y refinación.

- b. Restricciones de capacidad en las tasas de explotación, tasas de procesamiento o beneficio y en las tasas de refinación o comercialización.
- c. Costos de oportunidad.
- d. Restricciones geológicas.
- e. Costos que deben ser incluidos en el cálculo de la Ley de Corte: costos de minado, de procesamiento, de refinación, de transporte, etc.
- f. Estrategia de mezclas.

Tradicionalmente, cuando se define la mínima o Ley de Corte de equilibrio (Franco & Velilla, 2014), se hace referencia a la que se aplica en situaciones en donde solamente se incluyen los costos operativos y las restricciones de capacidad; y se dejan de lado los costos de oportunidad y los flujos de caja no son descontados. Tampoco se presentan consecuencias financieras, que puedan afectar la planeación minera, de procesamiento y de flujos de caja.

Considerando que el objetivo de esta tesis doctoral, hace énfasis en los depósitos metálicos, se realizará una breve descripción de la estimación determinística de la Ley de Corte de equilibrio en este tipo de yacimientos.

(Lane, 1964), desarrolló un algoritmo que tiene como función objetivo la maximización del VPN a través del cálculo de la Ley de Corte, mediante un proceso iterativo teniendo en cuenta restricciones que afectan el proceso minero, tales como,

las capacidades a las que están sujetas las etapas de minería, procesamiento y refinación del mineral.

Más adelante (Lane, 1988), recopila los avances que ha conseguido en el desarrollo de políticas de optimización de la Ley de Corte crítica (LCC) en el programa de computación *OGRE* (*Optimum Grades for Resource Exploitation*), con el propósito de brindar una herramienta que facilite el cálculo de la Ley de Corte poniendo en consideración variables que afectan el negocio en el transcurso de su explotación. Este programa es diseñado especialmente para el planeamiento minero a largo plazo, dado que el cálculo de la Ley de Corte es un ejercicio complejo si se realiza manualmente.

(Rendu, 2014), plasma los avances en materia de estimación de la Ley de Corte en los últimos 30 años, los principios y conceptos sobre los que se ha desarrollado, estructurando un análisis de las implicaciones que tiene sobre la operación minera su optimización con el fin de aumentar el VPN sustentado en el costo de oportunidad y otros costos asociados.

Publicaciones elaboradas por distintos autores encaminados a maximizar el VPN de un proyecto minero han fundamentado su trabajo en los principios antes expuestos y realizan aportes que han contribuido al cambio en la formulación de política de la LCC; entre estos están: (Dagdelen, 1992), (Bascetin & Nieto, 2007), (Rendu, 2009), (Bascetin, et al., 2011), (Abdel-Sabour & Dimitrakopoulos, 2011), (Nieto & Zhang, 2013), (Botin, et al., 2015).

2.2.1. Ley de Corte final y Ley de Corte de Lane

A continuación se presentan las ecuaciones (1) y (2) que indican la manera tradicional de cálculo de la LCC. La primera se refiere a las LCC del pit final y la segunda a la LCC de procesamiento, llamadas las leyes de corte crítica de equilibrio.

$$LCC \text{ del pit final} = \frac{m+cp}{(S-re)*y} \quad (1)$$

$$LCC \text{ de procesamiento} = \frac{cp}{(S-re)*y} \quad (2)$$

En donde: m es el costo de minado, cp es el costo de procesamiento, S hace referencia al precio del producto o mineral, re se relaciona con el costo de refinación y y es el porcentaje de la recuperación.

La ecuación (1) garantiza que ningún material se explote de la mina, a menos que todo el costo directo asociado con obtener y comercializar el mineral sea recuperado. La ecuación (2) se emplea una vez se hayan seleccionado los bloques destinados para minería con la primera ecuación, y el fin es llegar a los bloques de mineral de las leyes más altas, independientemente de los costos de minería en los cuales se incurran. Las características generales de la LCC definidas en la ecuación (1) y (2) son (Dagdelen, 1992):

- a. Satisfacer el objetivo de maximizar los beneficios descontados de una operación minera.

- b. Considerar LCC constante a menos que el precio del producto y los costos cambien durante la vida útil de la mina.
- c. No tener en cuenta la distribución de la ley en el depósito.

En su enfoque, *Lane* propone cambiar la política de la definición de la LCC, expresándola como función del valor presente neto VPN con el fin de lograr maximizarlo; en razón a esto se incluye en el cálculo el término costo de oportunidad (F) por tonelada de material procesado por año. Esta consideración surge bajo la concepción de que el no procesar mineral hoy, en el inicio de la explotación, (debido a no contar con suficiente capacidad de procesamiento), implica no recibir dinero en el flujo de caja en los primeros años de explotación del proyecto, principio que tiene sus bases en el concepto del valor del dinero en el tiempo (Hustrulid, et al., 2013).

El costo de oportunidad es determinado por la ecuación (3):

$$F = \frac{d * VPN}{C} \quad (3)$$

En donde:

d = tasa de descuento.

C = Capacidad de procesamiento de la planta.

La ecuación (4) indica la utilidad generada anualmente por la explotación cuando se tiene como restricción o limitante, la capacidad de procesamiento en planta.

$$U = (S - r)Qr - \left(\frac{f}{C} + C\right)Qc - mQm \quad (4)$$

(4)

En donde:

U = Utilidad por periodo.

S = Precio del producto.

r = Costos de venta.

Q_r = Cantidad de producto obtenido por refinación.

f = Costos fijos.

C = Capacidad de procesamiento de la planta.

Q_c = Cantidad de material procesado.

m = Costo de minado.

Q_m = Cantidad de material minado.

La LCC de la mina sujeta a la restricción mencionada anteriormente queda expresada por la ecuación (5) como sigue:

$$\gamma_p = \frac{Q_r}{yQ_m} = \frac{c + \frac{f+d*VPN}{C}}{(S-r)y} \quad (5)$$

Dónde:

Y_p = Ley de Corte crítica de procesamiento.

Aunque *Lane* estableció las bases de los modelos de estimación de la Ley de Corte, su modelo presenta algunas limitaciones, dadas las condiciones actuales del negocio minero (incertidumbre, costos ambientales y sociales, Ley de Corte variable, altas tasas de descuento, leyes medias cada vez menores para depósitos metálicos y polimetálicos, restricciones ambientales, mineras, de procesamiento y de refinación, entre otras), por

lo que se hace necesario proponer y desarrollar modelos alternativos que permitan estimar la Ley de Corte de un depósito mediante minería a cielo abierto. Autores como *Asad y Dimitrakopoulos*, entre otros, han desarrollado modelos alternativos en los cuales proponen encontrar una aproximación heurística en la estimación y optimización de la Ley de Corte para la inclusión de la incertidumbre para un proyecto minero a cielo abierto con procesos complejos.

2.2.2. Aproximación Heurística en la Estimación y Optimización de la Ley de Corte para la inclusión de la incertidumbre

Recientemente, (Asad & Dimitrakopoulos, 2013), intentan realizar una aproximación heurística en la estimación y optimización de la Ley de Corte para un proyecto minero metálico (analizan el caso de estudio de un solo mineral de interés económico como lo es el cobre) a cielo abierto con procesos complejos, incluyendo el análisis de un número discreto de posibles escenarios de leyes para considerar la incertidumbre geológica. Tienen además la posibilidad de considerar múltiples procesos. En las Tablas 2 y 3, se muestra la descripción de variables definidas por dichos autores del modelo propuesto:

Conjuntos		
Símbolo	Explicación	Observación
ω	Indicador de curva ley – tonelaje.	Posible escenario de presencia de leyes con equiprobabilidad de ocurrencia. $\omega_1, \omega_2, \dots, E$
p	Indicador de proceso.	Se definen cuatro procesos: 1.Lixiviación, 2.Biolixiviación, 3.Flotaación Molino A y 4. Flotaación Molino B.
t	Indicador de periodo	Año. $t= 1,2,\dots T$

Tabla 2. Definición de conjuntos. Fuente: (Asad & Dimitrakopoulos, 2013).

Parámetros o Datos		
Símbolo	Explicación	Observación
S	Precio del mineral (\$/tonelada de mineral).	Asad y Dimitrakopoulos realizaron su análisis para un único mineral, en este caso Cobre.
m	Costo de minería.	\$/tonelada de mena.
Cp(p)	Costo de procesamiento p	\$/tonelada de mineral.
re	Costo de refinación.	\$/tonelada de mineral.
f	Costos fijos o por periodo.	\$/año o periodo.
M	Capacidad mina.	Toneladas mena/año.
C(p)	Capacidad de procesamiento del proceso p.	Toneladas mineral /año.
R	Capacidad de refinación.	Toneladas mineral /año.
Qm(ω,t)	Cantidad de material minado por la curva de ley – tonelaje ω durante el periodo t.	Toneladas de material minado/año
Qc(ω,p,t)	Cantidad de mena procesada por la curva de ley – tonelaje ω en el proceso p durante el periodo t.	Toneladas de mena procesada/año
Qr(ω,t)	Cantidad de material refinado en la curva de ley – tonelaje ω durante el periodo t.	Toneladas (libras u onzas troy) de material refinado/año
d	Tasa de descuento.	Porcentaje, %.
y	Porcentaje de recuperación metalúrgica	Porcentaje, %.

Tabla 3. Determinación de parámetros o datos del modelo. Fuente: (Asad & Dimitrakopoulos, 2013).

En la ecuación (6), se muestra la función objetivo a maximizar en este problema de optimización con sus respectivas restricciones (ecuaciones 7, 8 y 9). Para cada escenario $\omega=1,2,\dots,\omega_{el}$, se optimiza (es decir, hay un modelo de optimización para cada omega):

$$Max \sum_{t=1}^T \frac{(((S-r)Qr(\omega,t)) - (\sum_{p \in P} Cp(p)Qc(\omega,p,t)) - (mQm(\omega,t)) - f)}{(1+d)^t} \quad (6)$$

$$Qm(\omega, t) \leq M, \quad \forall t = 1, 2, \dots, T \quad (7)$$

$$Qc(\omega, p, t) \leq Cp, \quad \forall t = 1, 2, \dots, T, \forall p = 1, 2, \dots, 4 \quad (8)$$

$$Qr(\omega, t) \leq R, \quad \forall t = 1, 2, \dots, T \quad (9)$$

En caso de que se presente un posible escenario ω , es decir, dada una curva tonelaje – ley ω , el término $CF(\omega, t)$ es el flujo de caja que da cuenta de la $Qm(\omega, t)$, la $Qc(\omega, p, t)$ y la $Qr(\omega, t)$

A partir del sistema de ecuaciones (6) a (9) se determina la Ley de Corte óptima Y_p tal que la función en (6) se maximiza teniendo en cuenta que las restricciones (7) - (9) pueden estar limitando la operación minera, ya sea individualmente o en pares. Si las restricciones (7) - (9) limitan o restringen la utilización de forma individual, la Ley de Corte óptima corresponde a la restricción mina Y_{mp} , restricción planta Y_{pp} , o restricción refinación Y_{rp} . Sin embargo, si las restricciones (7) - (9) se presentan de dos en dos, entonces la capacidad máxima disponible de estas restricciones puede ser utilizada por el equilibrio de la salida en las etapas de la mina, del proceso o de la refinación, de forma que la Ley de Corte óptima corresponde al equilibrio de las leyes de corte de la mina-proceso Y_{mp} , mina-refinación Y_{mr} , o proceso-refinación Y_{pr} . Tal que, dependiendo de las restricciones (7) - (9), se selecciona la Ley de Corte óptima para un proceso en particular entre la restricción y el equilibrio de leyes de corte.

El sistema de ecuaciones (6) a (9) se resuelve mediante un procedimiento heurístico que maximiza el VPN de la operación, manteniendo las cantidades de materiales extraídos, procesados y refinados en un período determinado t dentro de las capacidades límites disponibles. El marco heurístico permite la selección de la Ley de Corte óptima para un proceso p , tal que corresponde no sólo al VPN de la operación, sino también a las capacidades operativas, dando lugar a valores dinámicos cambiantes de un período a otro con el agotamiento de las reservas. Este sistema de ecuaciones

servirá de base para la determinación del modelo propuesto en esta investigación, es decir, se inicia con una función objetivo sujeto a unas restricciones de mina, planta, refinación, entre otras.

A pesar de incluir la incertidumbre aún quedan cuestiones por integrar como un número mayor de escenarios de análisis, un análisis muy completo de los beneficios como una variable estocástica, leyes de corte dinámicas en el tiempo, manejo de leyes de corte en depósitos polimetálicos, entre otros.

Luego de definir estos modelos, vale la pena enumerar según (Koushavand, et al., 2014) algunas de las deficiencias o debilidades que hasta el momento se han presentado en la elaboración y desarrollo de este tipo de modelos de planeamiento minero, que intentan dar cuenta de la maximización del VPN incluyendo el riesgo e incertidumbre (Ya sea desde el planeamiento minero estocástico, el modelo de bloques o secuenciamiento minero y la estimación de la Ley de Corte). Las deficiencias o debilidades actuales de los métodos de planificación de minas incluyen:

- a. La mayoría de los métodos muestran el efecto de la incertidumbre en el plan de la mina, pero no sugieren un método para minimizar el riesgo de incertidumbre.
- b. Los métodos no son fácilmente validados ni replicados para los problemas de minería de tamaño real.
- c. No existe una metodología para calcular fácilmente el costo de la incertidumbre.

Un factor común de los modelos descritos es que en ellos se considera una *Life of Mine* predeterminada o prefijada. Adicionalmente, las variables de los bloques son binarias (llegando a ser millones), siendo estas características las que se pretenden disminuir o minimizar con las contribuciones o aportes del modelo propuesto en esta investigación. Vale la pena aclarar que este caso de aplicación para el modelo propuesto es diferente o se aleja de los modelos descritos hasta el momento.

El capítulo 3, se presenta la definición del modelo propuesto en esta tesis de doctorado, describiendo el modelo de optimización estocástica para una explotación minera a cielo abierto para un depósito polimetálico, sus características, su metodología, su nomenclatura, su función objetivo y sus restricciones, entre otras.

CAPÍTULO 3. MODELO DE OPTIMIZACIÓN ESTOCÁSTICA PARA EXPLOTACIONES MINERAS A CIELO ABIERTO DE UN DEPÓSITO POLIMETÁLICO

En este capítulo se define la propuesta del modelo de optimización estocástica para una explotación minera a cielo abierto de un depósito polimetálico. Se desarrolla de una manera amplia, la descripción del modelo que esta investigación propone y en el Capítulo 4 se valida el modelo propuesto en un caso de aplicación de un proyecto minero real que, dadas las restricciones de confidencialidad de la información, no es permitido nombrarlo. Es conveniente anotar, que esta propuesta del modelo estocástico para una explotación minera a cielo abierto para un depósito metálico se fundamenta en la incertidumbre geológica y en la incertidumbre de mercado. En el caso de aplicar este modelo a un tipo de yacimiento diferente, por ejemplo, calcáreos, feríferos, carboníferos, entre otros, se hace necesario caracterizar geológica, técnica y económicamente dichos yacimientos, con el fin de tener en cuenta sus particularidades y de esta forma validar el modelo propuesto en esta tesis con el yacimiento mineral en estudio.

3.1. Definición del Modelo Propuesto para la Optimización Estocástica de una Explotación Minera a Cielo Abierto

Se describe a continuación, en la Figura 2, la generalización del modelo de optimización estocástica para un depósito polimetálico de una explotación minera a cielo abierto que se propone en esta investigación. Este modelo de optimización se compone básicamente de tres módulos. El primero, el modelo de secuenciamiento minero; el segundo, el modelo para la estimación de la Ley de Corte; y el tercero, el modelo de flujo de caja que incluye incertidumbre y riesgo. Tradicionalmente, el desarrollo de estos modelos se optimiza por separado, mientras que dado el objetivo general de esta tesis, estos tres modelos se optiman de manera conjunta, es decir, el Modelo integra modelos que suelen resolverse de forma independiente

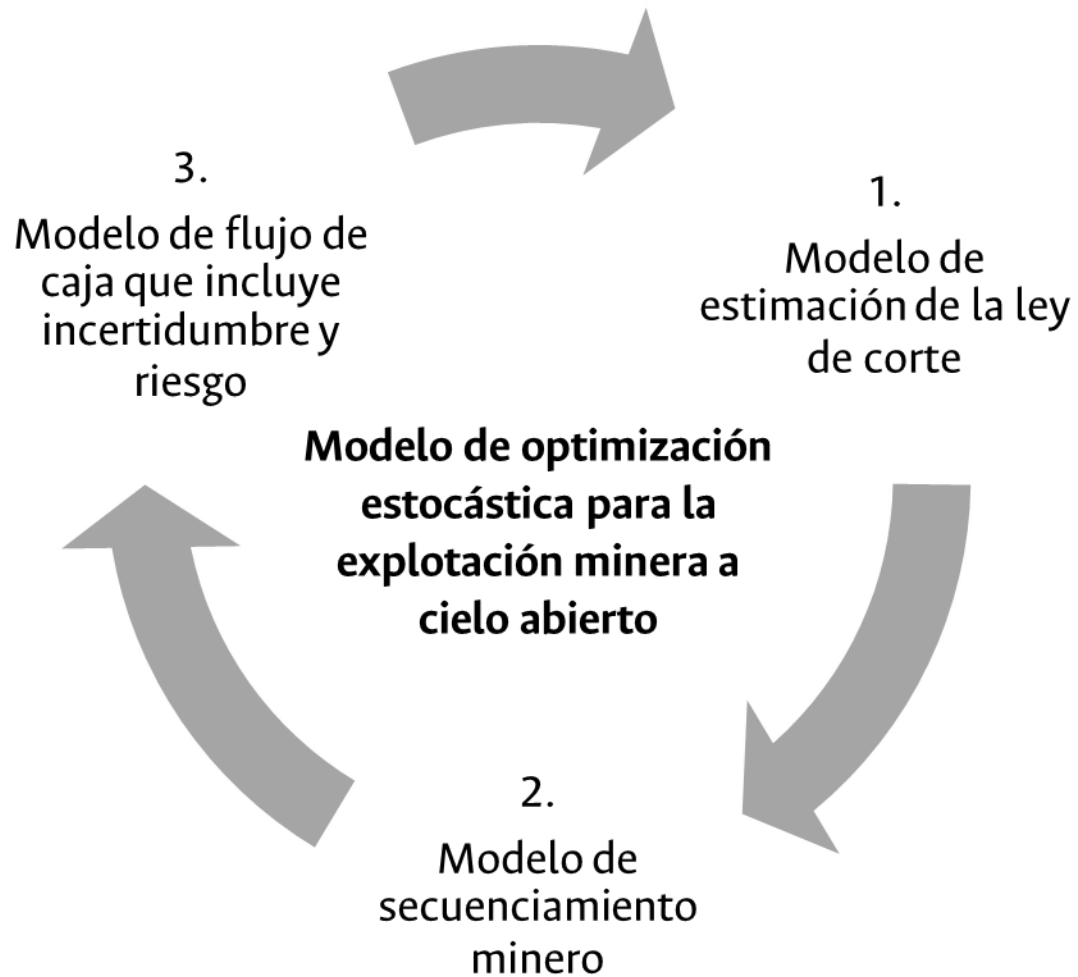


Figura 1. Modelo de optimización estocástica de una explotación minera a cielo abierto.

3.2. Modelo de Optimización Propuesto

El modelo de optimización estocástica propuesto en esta investigación se construyó con base en el flujo de procesos como se muestra en la Figura 3, en la que se realiza la

descripción del proceso extractivo y su aplicación a una mina hipotética que explota minerales a cielo abierto para un depósito polimetálico. La característica principal de este proceso extractivo minero, es la etapa de preclasificación del mineral que viene del proceso de explotación minera. Esta preclasificación, como su nombre lo indica, servirá para clasificar tres clases de flujos. El primero, el mineral que cumple con la Ley de Corte y pasa a la etapa de proceso 1. El segundo, el mineral que tiene una Ley de Corte marginal y se lleva a la pila de almacenamiento, con el fin de enviarlo a procesamiento más adelante. Y en tercer lugar, el material que no contiene mineral o minerales de interés económico y se clasifica como estéril y debe ser llevado a los botaderos.

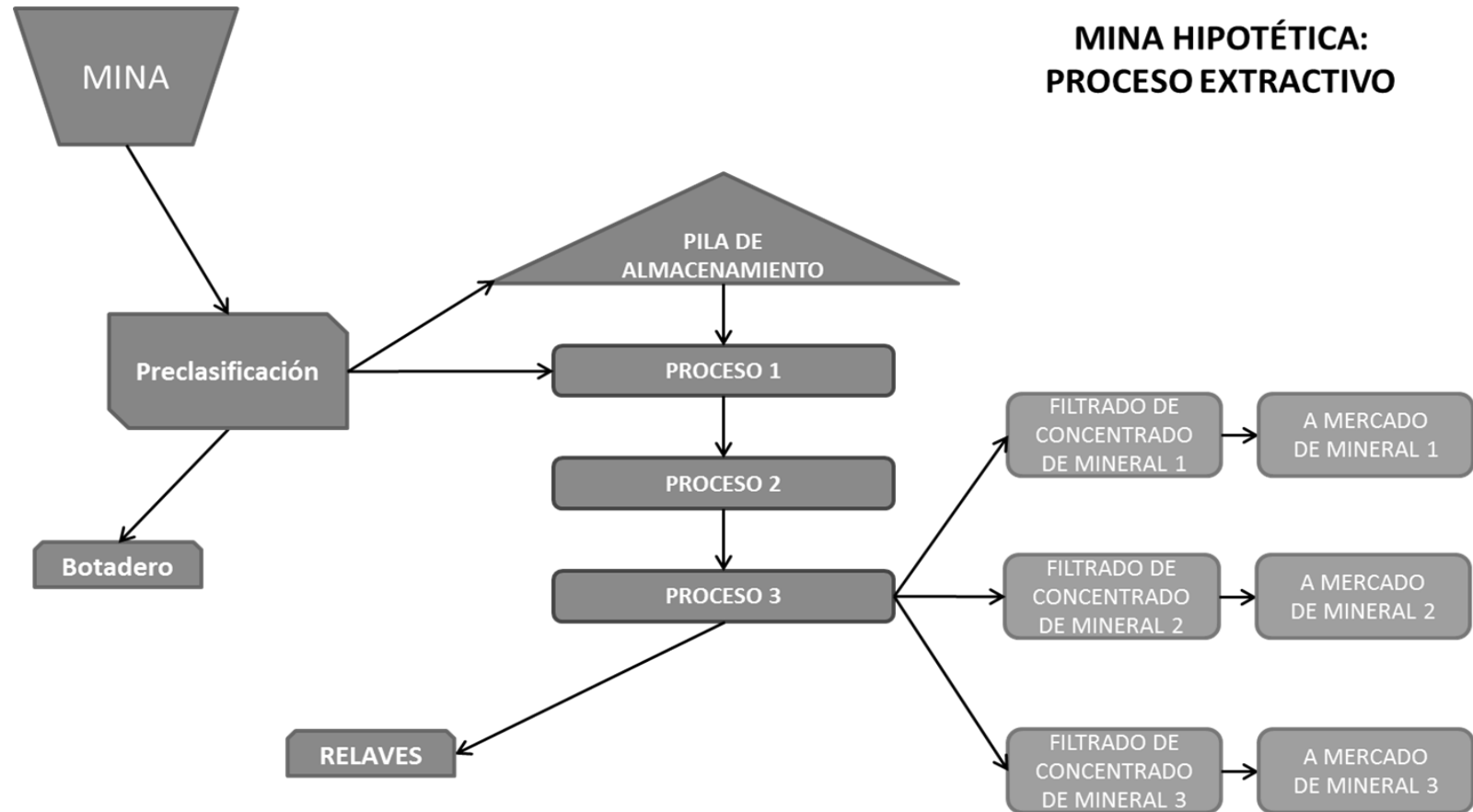


Figura 2. Descripción de proceso extractivo propuesto. Vale la pena aclarar que este proceso puede aplicarse a cualquier tipo de yacimiento mineral.

3.2.1 Características del modelo propuesto

Las características fundamentales que se definen en el modelo de optimización propuesto se describen a continuación:

- i. Se considerara incertidumbre geológica siguiendo una función de distribución de las leyes para cada bloque e incertidumbre económica usando pronósticos con series de tiempo para los precios y los costos con base en datos históricos. La metodología a seguir es la optimización estocástica implícita (simulación de Montecarlo + Metaheurística).
- ii. Se considera un modelo de la cadena completa: Mina - Pila de almacenamiento - Procesamiento - Refinación – Mercados - Botaderos - Relaves. Adicionalmente, se considera varios procesos que pueden ser algunos secuenciales y otros opcionales.
- iii. Se considera una Ley de Corte dinámica en el tiempo. Si los precios o costos cambian la Ley de Corte también debería cambiar: esto se justifica al modelar el precio como una variable aleatoria a partir de una serie de tiempo.
- iv. Se considera una Ley de Corte adicional para enviar a pila de almacenamiento de reserva (almacenamiento provisional del material) que también varía en el tiempo dependiendo del precio del momento en que se envía. De esta pila de almacenamiento se enviará a proceso en algún tiempo posterior t dependiendo también de los incrementos del precio en ese momento.
- v. Se consideran posibles incrementos o decrementos en las capacidades de mina, proceso y refinación con un costo adicional en la función objetivo (debido a esta consideración no se incluyen costos de oportunidad, los cuales se deben a poseer subcapacidades prefijadas).
- vi. Se considerará que la vida útil, es decir, T es una variable de decisión, que optimiza el periodo en que sería rentable explotar la mina ($T \leq T_T$, siendo T_T el periodo de análisis).
- vii. Se considera depósitos polimetálicos.

3.2.2 Metodología optimización estocástica implícita (Simulación de Montecarlo+ Metaheurística)

La optimización estocástica implícita permite solucionar problemas de optimización bajo incertidumbre de manera heurística, a partir de la comunicación iterativa de un algoritmo Metaheurístico de optimización (como Algoritmos Genéticos, Búsqueda Tabú, Enfriamiento o Recocido Simulado, Nube de Partículas, entre otros) y Simulación de *Montecarlo*: La Metaheurística propone posibles conjuntos de valores para las variables de decisión, y su desempeño es evaluado mediante una Simulación de *Montecarlo* que permite emular miles de posibles escenarios. A partir de estas evaluaciones va proponiendo mejores soluciones candidatas hasta que el proceso converja (es decir, a un muy buen valor teniendo en cuenta el criterio de convergencia). Ambas herramientas integradas permiten enfrentar problemas altamente no lineales, y la inclusión de ecuaciones complejas con operaciones como (si...entonces...; suma - si, and, or, max, min, etc.) lo que lo hace más adecuado en problemas no lineales y bajo incertidumbre.

En la optimización estocástica implícita, se evalúan posibles conjuntos de valores para las variables de decisión (individuo I en Algoritmos Genéticos), para responderse a la pregunta ¿Qué pasaría con los beneficios del VPN si: La Ley de Corte, la vida de la mina, entre otros, toma esos valores específicos del conjunto de valores I?. Específicamente, el proceso es el siguiente:

El algoritmo es iterativo, hasta que el proceso converja a una única solución o se llegue a un número máximo de iteraciones definido por el analista. En cada iteración

se genera una población de individuos en la que cada uno de ellos representa un vector de valores I . Para cada individuo I :

- a.** Se simulan muchos posibles escenarios ω (por ejemplo $E=10000$ escenarios) que son conjuntos de realizaciones de la ley de cada bloque y de las demás variables aleatorias (como el precio en cada t) a partir de las funciones de distribución correspondientes.
- b.** Para cada posible escenario ω , se calcula su VPN. La serie sintética de los m valores de VPN así obtenidos permite el análisis estadístico de las consecuencias de implementar las decisiones I .
- c.** Se obtiene la media (o cualquier otro estadístico como la desviación, máximo, mínimo, cuantil, entre otros) de la serie sintética de los VPN de las E realizaciones.

Con base en el estadístico a optimizar (por ejemplo maximizar el VPN medio o minimizar su desviación estándar) de todos los individuos I de la iteración actual, se generan nuevos individuos (nueva generación) a partir de los ya evaluados mediante operadores genéticos: selección, cruzamiento, mutación, que procuran propagar en las próximas poblaciones, las características de los mejores individuos encontrados hasta el momento.

El proceso termina cuando después de muchas iteraciones del GA ya no se mejora el estadístico del VPN como el valor medio del VPN o la desviación del VPN o una combinación de ambos (lo anterior, elegido por el analista según el perfil de riesgo del proyecto minero o empresa minera).

En la Figura 4, se muestra el esquema básico de los GA más simulación. Se referencia (Michalewicz & Fogel, 2004) para mayor profundización en GA y (Winston, 2010) para la integración entre GA y simulación de *Montecarlo*.

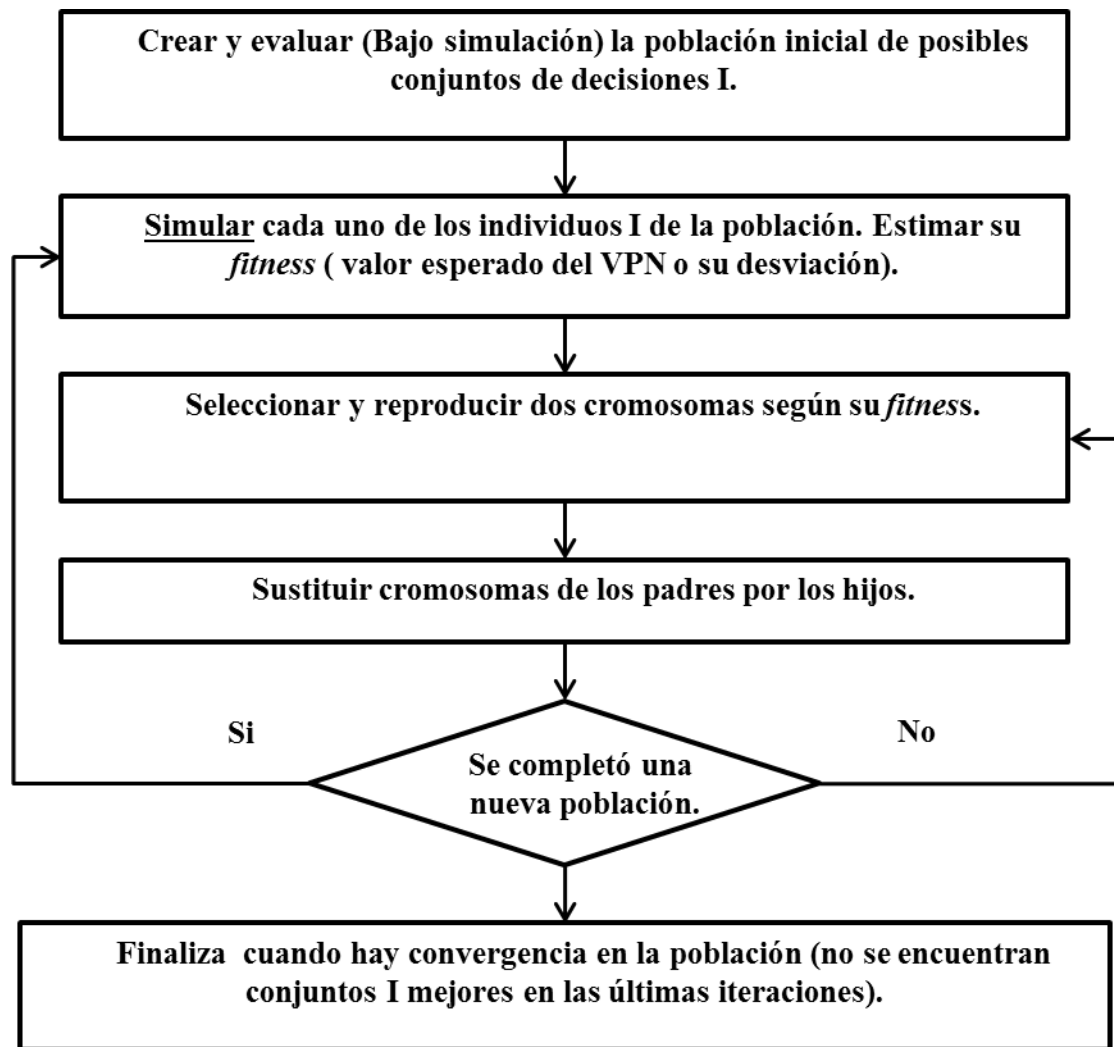


Figura 3. Esquema Básico de los GA + simulación.

3.2.3. Nomenclatura

A continuación, en las Tablas 4 a 9, se define la nomenclatura que se utiliza en el modelo propuesto en esta investigación. Se establecen los conjuntos, los parámetros, las variables aleatorias, las variables de decisión y los outputs o salidas del modelo propuesto.

Conjuntos		
Símbolo	Explicación	Observación
i	Bloque.	<i>Número del Bloque $i=1,2,...,N$</i>
p	Indicador de proceso	$p=1,2,3,4$
t	Indicador de periodo.	Año $t=1,2,...,T$
k	Mineral	Depósitos polimetálicos. $k=1,2,...,ORE$
E(i,t)	Conjunto de bloques superiores a i que no han sido explotados en el periodo t.	Inicialmente corresponde a todo el cono superior al bloque i. En siguientes periodos se actualiza eliminando lo que ya han sido minados en periodos anteriores.
$\omega(k,i)$	Escenario de ley del mineral k en el bloque i	Escenario o posible ocurrencia de ley del mineral $k =1,2,...,ORE$. En el modelo se aplicará un generador aleatorio de muchísimos escenarios (simulación de Montecarlo), siguiendo <i>ORE funciones de distribución específicas para cada bloque i</i>

Tabla 4. Definición de conjuntos del modelo propuesto

Símbolo	Explicación	Unidades
N	Número de bloques	
ORE	Número de minerales	
$S(k,t)$	Precio del mineral k en periodo t . <i>Pronóstico a partir de ajuste de un modelo de serie de tiempo a datos históricos</i>	(\$/lb, \$/lb o \$/oz).
TT	Horizonte de análisis	años
$m(i)$	Costo de explotar o minar el bloque i .	\$/tonelada de material.
$Cp(p)$	Costo de procesamiento del proceso p	\$/tonelada de mena.
$CFLOT$	Costos de flotación colectiva	\$/tonelada.
$r(k)$	Costo de flotación selectiva del mineral k .	\$/tonelada.
f	Costos fijos por periodo.	\$/año o periodo.
FL	<i>Capacidad de flotación</i>	
$CINCM / CDECM$	<i>Costos de incrementar /desmontar capacidad de mina.</i>	\$/tonelada.
$CINCR / CDECR$	<i>Costos de incrementar / desmontar capacidad de refinación.</i>	\$/tonelada.
$CINCC(p) / CDECC(p)$	<i>Costos de incrementar / desmontar capacidad de proceso p.</i>	\$/tonelada.

Cw	Costo de enviar al estéril.	\$/tonelada.
Cs	<i>Costo de enviar a pila de almacenamiento.</i>	\$/tonelada.
Csp	<i>Costo de enviar de pila de almacenamiento a proceso.</i>	\$/tonelada.
d	Tasa de descuento.	Porcentaje, %.
Mo	Capacidad inicial de minar.	Toneladas/año.
Co(p)	Capacidad inicial de procesamiento del proceso p.	Toneladas/año.
Ro(k)	Capacidad inicial de refinación del mineral k	Toneladas/año o lbs/a o ozs/a
Qw	Capacidad del estéril (tamaño máximo del pit).	Toneladas.
Qs	Capacidad de la pila de almacenamiento. (Máximo pila de almacenamiento del inventario).	Toneladas.
y(p)	Factor de recuperación del proceso p.	Porcentaje %.
yf	Factor de recuperación de flotación colectiva.	Porcentaje, %.
yfs(k)	Factor de recuperación de flotación selectiva del mineral k	Porcentaje, %.
v(i)	Cantidad de material del bloque i.	Toneladas.

Tabla 5. Definición valores que servirán de entrada del modelo propuesto.

Símbolo	Explicación	Unidades
$S(k,t)$	<i>Precio del mineral k en periodo t (pronóstico a partir del ajuste de una serie de tiempo). El valor pronosticado en t no es un valor constante sino una función de distribución en t.</i>	(\$/tonelada de mineral).
$Y(i,k)$	Ley del bloque i del mineral k . Sigue funciones de distribución específicas, una por cada mineral principal presente en el yacimiento.	Porcentaje (%), gramos de mineral por tonelada (g/t).

Tabla 6. Definición variables aleatorias de entrada al modelo propuesto.

Variables de decisión principales

Símbolo	Explicación	Observación
$D(t)$	<i>Bloque más profundo que se explota en t. Este valor define que los bloques de $E(D(t),t)$ se explotan en t ($x(D(t),t)=1$)</i>	$1 \leq D(t) \leq N$
$Sp(t)$	<i>Cantidad de material almacenado en pila que se envía a proceso en t.</i>	Toneladas.
$Y_{cog}(k,t)$	<i>Ley de Corte óptima del mineral k dinámica en el tiempo. Como es polimetálico no va a ser un número sino una regla de decisión tipo AND u OR.</i>	$0 \leq Y_{cog}(k,t) \leq 1$
$Y_s(k,t)$	<i>Ley de Corte óptima del mineral k dinámica en el tiempo con material de menor calidad para enviar a pila de almacenamiento. Como es polimetálico no va a ser un número sino una regla de decisión tipo AND u OR.</i>	$0 \leq Y_s(k,t) \leq Y_{cog}(k,t)$
T	<i>Vida útil de la mina (rentable).</i>	Años, $T \leq TT$
$\Delta M^+(t)$	<i>Incremento en capacidad M en t. Puede evaluarse en periodos mayores a t por ejemplo cada 5 años.</i>	Toneladas/año.
$\Delta M^-(t)$	<i>Decremento en capacidad M en t. Puede evaluarse en periodos mayores a t por ejemplo cada 5 años.</i>	Toneladas/año.
$\Delta C^+(p,t)$	<i>Incremento en capacidad de procesamiento en el proceso p en t. Puede evaluarse en periodos mayores a t por ejemplo cada 5 años.</i>	Toneladas/año.
$\Delta C^-(p,t)$	<i>Decremento en capacidad de procesamiento en el proceso p en t. Puede evaluarse en periodos mayores a t por ejemplo cada 5 años.</i>	Toneladas/año.
$\Delta R^+(t)$	<i>Incremento en capacidad de refinación R en t. Puede evaluarse en periodos mayores a t por ejemplo cada 5 años.</i>	Toneladas/año.
$\Delta R^-(t)$	<i>Decremento en capacidad de refinación R en t. Puede evaluarse en periodos mayores a t por ejemplo cada 5 años.</i>	Toneladas/año.

Tabla 7. Definición de variables de decisión del modelo propuesto.

Otras variables igualmente son de decisión pero dependen de las anteriores o de los parámetros y se presentan en la Tabla 8 por lo que no hacen parte de los valores propuestos en los individuos en AG sino que se calculan con base en los valores de las variables de decisión principales que son las incluidas en los individuos. En la Tabla 9 se describen los resultados más importantes, aunque también se obtienen todos los valores parciales del flujo de caja durante la vida de la mina y podrían evaluarse otros indicadores económicos como tiempo de recuperación del capital invertido, entre otros.

Símbolo	Explicación	Observación
$s(i,t)$	<i>1 si el bloque i se envía a pila de reserva en t. 0 en caso contrario</i>	Variable binaria
$w(i,t)$	<i>1 si el bloque i se envía a estéril en t. 0 en caso contrario</i>	Variable binaria
$pr(i,t)$	<i>1 si el bloque i se envía directamente a proceso en t. 0 en caso contrario.</i>	Variable binaria
$x(i,t)$	<i>1 si el bloque i se explota en t. 0 en caso contrario.</i>	
$IP(t)$	<i>Cantidad de material almacenado en pila en t.</i>	Toneladas.
$W(t)$	<i>Cantidad de estéril almacenado en botaderos en t.</i>	Toneladas.
$rw(t)$	<i>Cantidad que se envía desde la última etapa del proceso $p=4$ a relave.</i>	Toneladas.
$g_s(k,t)$	<i>Ley del material del mineral k almacenado en la pila (cambia a medida que va almacenando nuevo material) del mineral o en t.</i>	$0 \leq g_s(k,t) \leq 1$
$Q_m(t)$	<i>Cantidad de material minado—durante el periodo t.</i>	Toneladas de material minado.
$Q_c(p,t)$	<i>Cantidad de mena procesada en el proceso p durante el periodo t.</i>	Toneladas de mena procesada.
$Q_r(t)$	<i>Cantidad de material refinado durante el periodo t.</i>	Toneladas (libras u onzas troy) de Material refinado/t.
$M(t)$	<i>Capacidad de mina en t.</i>	Toneladas/año.

C(p,t)	<i>Capacidad de procesamiento del proceso p en t.</i>	Toneladas/año.
R(t)	<i>Capacidad de refinación en t.</i>	Toneladas/año.

Tabla 8. Definición de variables de decisión dependientes.

Símbolo	Explicación	Unidades
VPN	Valor presente neto total durante toda la vida útil de la mina. <i>Este resultado no es un valor determinístico sino que es una variable aleatoria lo que permite caracterizarlo estadísticamente: identificar el valor esperado, desviación estándar, probabilidad de pérdidas, probabilidad de alcanzar metas específicas, valor en riesgo para un percentil específico), entre otros.</i>	US\$.

Tabla 9. Productos u Outputs principales del modelo propuesto.

3.2.4. Funciones objetivo

En el modelo puede usarse alguna de las siguientes funciones objetivo:

- Objetivo 1: Maximizar el valor esperado del valor presente neto de la explotación en toda la vida útil.
- Objetivo 2: Minimizar el riesgo, valorado como la desviación del valor presente neto de la explotación en toda la vida útil.
- Otra posibilidad es maximizar (Objetivo 1/ Objetivo 2) = μ/σ u otra opción es analizar una función de compensación entre objetivos, es decir, cuánto está dispuesto a perder en un objetivo a cambio de una ganancia específica en el otro (mediante análisis multiobjetivo).

El valor presente neto de la explotación en toda la vida útil se representa así como se muestra en la ecuación 10:

$$VPN = \sum_{t \in T} \frac{P(t)}{(1+d)^t} \quad (10)$$

En donde,

$P(t)$ = Ingresos por venta menos el costos de minado menos los costos de manejo de pila menos los costos de procesos menos los costos de refinación menos los costos de incremento o decremento de capacidades, entre otros (como costos de reparación o costos ambientales).

En la ecuación 11, se presenta una expansión de los beneficios:

$$P(t) = \left[\sum_{k=1}^{ORE} (S(k, t) - yr(k)Qr(k, t) - re(k)Qr(k, t)) - Qc(t)C(1) - Qc(t) \sum_{p>1}^P y(p-1)C(p) - \sum_{i=1}^N m(i)Qm(i, t) - CEST(t) - CPALM(t) - f(t) - CINCRE(t) - CDECRE(t) - Otros \right] \quad (11)$$

Las ecuaciones (12), (13), (14) y (15), respectivamente, describen los costos totales de incremento o desmonte de capacidad en mina, procesos, refinación, los costos de estéril y el costo de la pila de almacenamiento.

$$CINCRE(t) = (CINCM)\Delta^+M(t) + \sum_{p=1}^4 (CINCC(p))\Delta^+P(p, t) + \sum_{k=1}^{ORE} CDECR(k)\Delta^+R(k, t), \quad \forall t = 1, \dots, T \quad (12)$$

$$CDECRE(t) = (CDECM)\Delta^{-M}(t) + \sum_{p=1}^P(CDECC(p))\Delta^{-P}(p,t) + \sum_{k=1}^{ORE} CDECR(k) \Delta^{-R}(k,t), \quad \forall t = 1, \dots, T \quad (13)$$

$$CEST(t) = C_w(\sum_{i=1}^N w(i,t) - v(i,t) + rw), \quad \forall t=1, \dots, T \quad (14)$$

$$CPALM(t) = C_s(\sum_{i=1}^N s(i,t) - v(i,t)) + C_{sp}Sp, \quad \forall t \quad (15)$$

3.2.5 Restricciones

A. De explotación

2. $D(t)$ es la variable de decisión que define los bloques que se explotan en el periodo t ($x(i,t) \in E(D(t),t)$) siendo $E(D(t),t)$ los bloques del cono superior al bloque $D(t)$ y que aún no han sido explotados en t . A partir de ella y de la ley de corte y de pila de almacenamiento se define cuáles bloques van a proceso, a pila de almacenamiento o estéril por una regla de decisión. Esto reduce enormemente el número de variables de decisión a solo t variables de bloques en comparación a los modelos encontrados en la literatura que definen variables binarias una por cada bloque y por cada t ($N \times TT$ variables binarias) lo que hace que el costo computacional requerido sea mucho menor, aumente la posibilidad de conseguir buenas soluciones, se pueda abordar minas muchísimo más grandes o dividir en un número de bloques más pequeños para volver más realista el problema.

A manera ilustrativa, se presenta la relación en la Figura 5 y en la Figura 6, entre $D(t)$ y $x(t)$ en un modelo en dos dimensiones y de 20 bloques, aunque realmente el modelo se aplica también en 3 dimensiones como se hace en la aplicación presentada en el capítulo 4. Suponiendo que $D(1)=7$, $D(2)=16$ y $D(3)=19$ se presentaría la explotación de los bloques definidos en la Figura 5.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20

Figura 4. Secuenciamiento de explotación para los años 1 (verde), 2 (amarillo) y 3 (azul).

t	$D(t)$	Se explotan los bloques ($x(i, t=1)$)
Año 1	7	1, 2, 3, y 7
Año 2	16	4, 6, 8, 11, 12, y 16
Año 3	19	5, 9, 10, 13, 14, 15 y 19

Figura 5. Variable de decisión $D(t)$ para la explotación del bloque más profundo y los correspondientes bloques pertenecientes a $E(D(t), t)$.

$x(i, t)$ se explota en el año t si pertenece al cono (actualizado) de $D(t)$, es decir si pertenece a $E(D(t), t)$

$$X(i, t) = 1 \quad \text{si } i \in E(D(t), t) \quad (16)$$

Y de ahí a ese $x(i, t) = 1$, se le aplica la regla de decisión según la Ley de Corte, va a botadero; a pila de almacenamiento o a proceso sí:

SI $Y(i, k=1) \geq Y_{cog}(k=1, t)$ OR $Y(i, k=2) \geq Y_{cog}(k=2, t)$...OR $Y(i, k=ORE) \geq Y_{cog}(k=ORE, t)$

ENTONCES

$x(i, t) = pr(i, t)$ es decir el bloque i se envía a proceso $p=1$

SINO SI

$Y(i, k=1) \geq Y_s(k=1, t)$ OR $Y(i, k=2) \geq Y_s(k=2, t)$...OR $Y(i, k=ORE) \geq Y_s(o=ORE, t)$

ENTONCES

$x(i, t) = s(i, t)$ es decir el bloque i se envía a pila de almacenamiento

SINO

$x(i, t) = w(i, t)$ es decir el bloque i se envía a estéril.

Para el siguiente periodo t , para cada bloque i , se actualiza $E(i, t+1)$, eliminando los bloques que ya han sido minados en los periodos anteriores.

- i. **Capacidad máxima de explotación:** Cantidad de material minado en el periodo t es igual a $Qm(t)$ que no debe superar la capacidad de explotación anual

$$Qm(t) = \sum_{i=1}^N x(i, t)v(i) \leq M(t), \quad \forall t = 1, \dots, T \quad (17)$$

- ii. **Distribución de cada bloque:** la cantidad explotada del bloque i en el año t es igual a la cantidad que se envía a estéril más la que se envía a la pila de almacenamiento de reserva más lo que se envía directamente al primer proceso: en la heurística se decide a partir de una regla de decisión. En realidad, esta restricción siempre se cumpla a raíz de la anterior regla de decisión SI...ENTONCES SI... ENTONCES:

$$x(i, t) = w(i, t) + s(i, t) + pr(i, t), \forall i = 1, \dots, N, \forall t = 1, \dots, T \quad (18)$$

- iii. **Actualización del inventario de pila de almacenamiento:** El volumen de pila de almacenamiento en el periodo t es igual al que se tenía en el periodo anterior más el que se adiciona ese periodo menos el que se envía a proceso desde la pila. Ese valor no puede superar la capacidad máxima de pila de reserva.

$$IP(t) = IP(t - 1) + \sum_{i=1}^N s(i, t)v(i, t) - Sp(t), \forall t = 1, \dots, T \quad (19)$$

$$IP(t) \leq Q_s, \quad \forall t = 1, \dots, T \quad (20)$$

- iv. **Actualización de la calidad (ley) de la pila de almacenamiento:** La ley de la pila se actualiza con la entrada del nuevo material. Se supone que la mezcla de material tendrá un tenor ponderado por las cantidades almacenadas anteriormente y la nueva. Lo anterior para cada mineral k :

$$g_s(k, t) = \frac{g_s(k, t-1)IP(t-1) + \sum_{i=1}^N \gamma(i, k)s(i, t)v(i)}{IP(t-1) + \sum_{i=1}^N s(i, t)v(i)}, \quad \forall k = 1, \dots, ORE, \forall t = 1, \dots, T \quad (21)$$

B. De proceso

La cantidad de material que entra al proceso $p=1$ es la suma de lo que se explota en t y cumple la combinación de leyes de corte, más la que proviene de la pila de reserva. Este valor no puede superar la capacidad $C(1, t)$.

$$Qc(t) = \sum_{i=1}^N pr(i, t)v(i) + Sp(t) \leq C(1, t), \quad \forall t = 1, \dots, T \quad (22)$$

Para los demás procesos se aplican porcentajes de pérdidas (o recuperaciones) de los procesos anteriores.

$$\prod_{l=1}^{p-1} \gamma(l) (\sum_{i=1}^N pr(i, t)v(i) + Sp(t)) \leq C(p, t), \quad \forall p = 2, 3, 4, \forall t = 1, \dots, T \quad (23)$$

El operador multiplicador (Π) se usa porque se supone que los procesos son secuenciales (uno después de otro). En caso de que en el caso de aplicación haya procesos paralelos debe adecuarse esta ecuación.

C. De flotación

La cantidad de material que entra a flotación colectiva es la suma del mineral que se recupera en el último proceso.

$$Qr(t) = \prod_{p=1}^4 \gamma(p) (\sum_{i=1}^N pr(i, t)v(i) - \sum_{k=1}^{ORE} \gamma(i, k) + Sp(t) \sum_{k=1}^{ORE} \gamma(k, t)) \leq FL(t), \quad \forall t = 1, \dots, T \quad (24)$$

El material que sobra pasa a relave:

$$rw(t) = \prod_{p=1}^4 y(p)Qc(p) - Qr(t), \quad \forall t = 1, \dots, T \quad (25)$$

Se actualiza la cantidad dispuesta en el estéril del periodo t , que es igual a la que tenía en el periodo anterior, más la que se envía directamente de mina porque no cumple las leyes de corte más la que se envía de relave. Esa cantidad no puede superar un límite máximo de capacidad de estéril.

$$W(t) = W(t-1) + \sum_{i=1}^N w(i,t)v(i) + rw(t), \quad \forall t = 1, \dots, T \quad (26)$$

$$W(t) \leq Q_w, \quad \forall t = 1, \dots, T \quad (27)$$

La cantidad de material que llega a la Flotación selectiva para cada mineral k corresponde a la cantidad de mineral k proveniente del último proceso afectada por el factor de recuperación de la flotación colectiva. Este valor no puede superar la capacidad RFS (k,t).

$$QF(k,t) = yfs(k) \prod_{p=1}^4 y(p) (\sum_{i=1}^N pr(i,t)v(i)\gamma(k,t) + Sp(t)\gamma_s(k,t)) \leq RFS(k,t), \quad \forall k = 1, \dots, ORE, \forall t = 1, \dots, T \quad (28)$$

D. Otras

i. Actualización de capacidades

Generalmente, se consideran las capacidades como algo predeterminado para las empresas pudiendo estar incurriendo en costos de oportunidad, o por lo contrario perdiendo costos operativos innecesarios por excedentes en capacidad. Se permite, entonces, aumentar capacidad de explotación en mina o todos los demás procesos mediante compra de maquinaria o de nueva tecnología en algunos de los periodos. Igualmente puede desmontarse capacidad mediante la venta o traspaso a otros

proyectos mineros. Tanto, aumento como desmonte de capacidad son variables de decisión que tienen un costo en la función objetivo. Cada capacidad actual es igual a la anterior más el incremento (si lo hay) menos el incremento (si lo hay): para evitar costo computacional o constantes cambios en los equipos, estas variables pueden considerarse cada N periodos de tiempo. Por ejemplo cada 5 años.

$$M(t) = M(t - 1) + \Delta^+ M(t) - \Delta^- M(t), \quad \forall t = 1, \dots, T \quad (29)$$

$$C(p, t) = C(p, t - 1) + \Delta^+ C(p, t) - \Delta^- C(p, t), \quad \forall p = 1, 2, 3, 4, \quad \forall t = 1, \dots, T \quad (30)$$

$$R(t) = R(t - 1) + \Delta^+ R(t) - \Delta^- R(t), \quad \forall t = 1, \dots, T \quad (31)$$

E. Condiciones de las variables de decisión:

$$Y_p(k, t) \geq 0; \quad Y_s(k, t) \geq 0$$

$$T \text{ es variable entera positiva } 1 \leq T \leq T_T$$

$$D(t) \text{ es variable entera positiva } 1 \leq D(t) \leq N$$

$$\Delta M^+(t) \geq 0, \quad \forall t = 1, \dots, T$$

$$\Delta M^-(t) \geq 0, \quad \forall t = 1, \dots, T$$

$$\Delta C^+(p, t) \geq 0, \quad \forall t = 1, \dots, T, \quad \forall p = 1, \dots, 4$$

$$\Delta C^-(p, t) \geq 0, \quad \forall t = 1, \dots, T, \quad \forall p = 1, \dots, 4$$

$$\Delta R^+(t) \geq 0, \quad \forall t = 1, \dots, T$$

$$\Delta R^-(t) \geq 0, \quad \forall t = 1, \dots, T$$

Nótese que el modelo no incluye restricciones de precedencia y pendientes de explotación de bloques, como si lo hacen los enfoques encontrados en la literatura. Esto no es necesario porque en la definición de $D(t)$, y su relación con las variables $x(i,t)$ mediante la matriz $E(i,t)$ ya están incluidas. Es decir, esa definición hace que jamás se incumplan. En los modelos encontrados en la literatura esas restricciones son $N \times t$ (lo que aumenta el costo computacional enormemente) y en el modelo propuesto son cero. Nótese, además, que la vida útil es una variable de decisión que puede tomar valores entre 1 y un valor máximo T . Es decir, que los índices de las sumatorias son dinámicos, dependiendo de los valores del individuo que se evalúa en AG.

CAPÍTULO 4. CASO DE ESTUDIO

Una vez definidas las características, la metodología, la nomenclatura, las funciones objetivo y las restricciones, se realiza la aplicación del modelo propuesto en esta investigación a una mina hipotética a cielo abierto que explota un yacimiento polimetálico cuyos minerales principales son Molibdeno, Cobre y Oro. Las características y valores son adaptaciones de una mina real pero por razones de confidencialidad de la información no se permite usar los datos originales, ni suministrar el nombre de la empresa ni de la mina (debido a esto los datos usados no son los reales sino que se les aplicó un pequeño ruido aleatorio).

4.1. Caso de Estudio: Explotación Minera a Cielo Abierto de un Depósito Polimetálico.

A partir de la descripción del modelo propuesto se presenta, a continuación, el caso de aplicación para un yacimiento polimetálico de una explotación minera a cielo abierto. Para este caso de estudio se asume un proceso productivo sin contaminantes (v.g. arsénico para este tipo de yacimientos polimetálicos).

En la Figura 7 se puede apreciar el proceso extractivo para la mina hipotética de un yacimiento polimetálico.

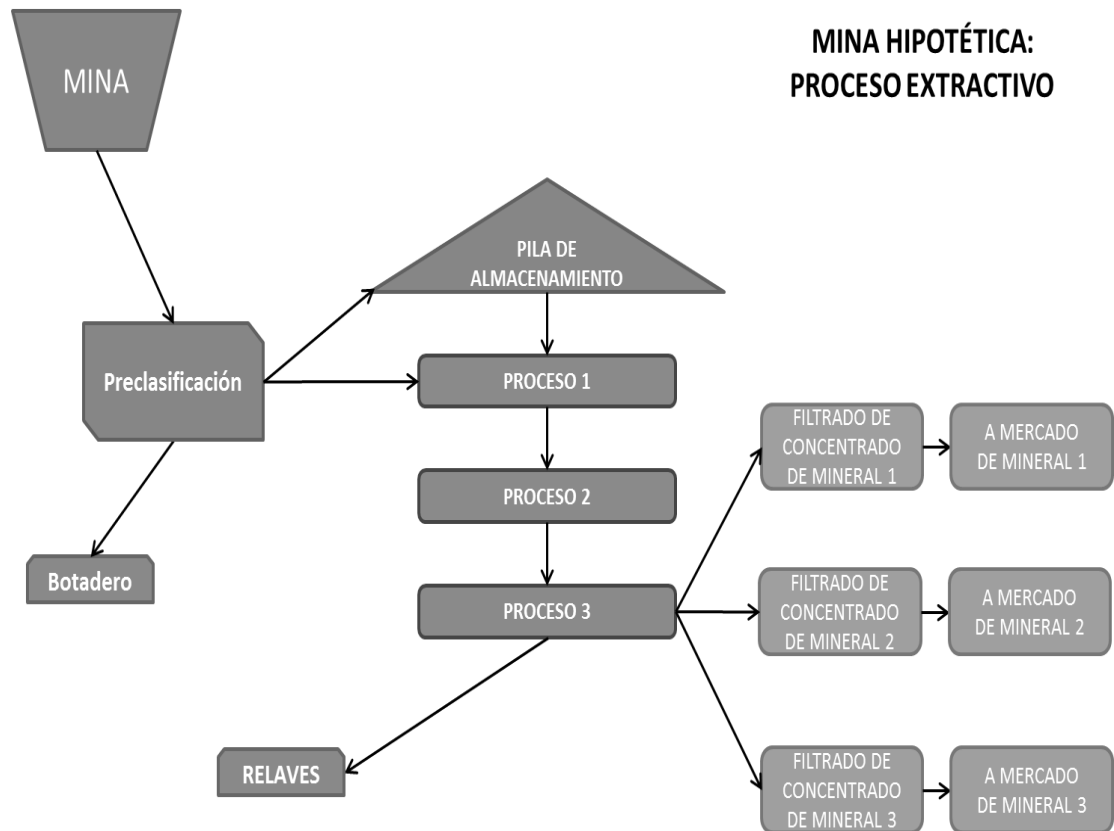


Figura 6. Proceso extractivo mina hipotética a cielo abierto.

En la Tabla 10, se puede apreciar el caso de estudio sobre el cual se realizará la comparación con el modelo propuesto en esta investigación:

<i>Caso de estudio</i>	
Inversión total	US\$ 4200 millones
Capacidad de procesamiento	110k TPD
Capacidad de la mina	567k TPD
<i>Life of Mine</i> (LoM)	15 años
Cobre (Cu) refinado	252 MM lbs
Molibdeno (Mo) refinado	49 MM lbs
Oro (Au) refinado	40k oz

Tabla 10. Datos base del proyecto hipotético.

En los Anexos de esta investigación, se puede encontrar toda la información relacionada con la descripción del caso base y los resultados de la optimización realizada como caso de estudio determinístico.

Este caso de estudio cuenta con un modelo de bloques con 280 bloques (7 bloques en el eje X, 8 bloques en el eje Y y 5 bloques en el eje Z), con dimensiones cada uno de 650, 390 y 224 m, respectivamente. Las dimensiones del macrobloque son (X, Y, Z) 3900, 2730 y 896 m, respectivamente. En la Figura 8, se puede apreciar la distribución espacial de los 280 bloques a ser explotados en el modelo propuesto.

En esta investigación, se entiende por fase lo siguiente:

Fase I: Bloques del 1 al 56. Fase II: Bloques del 57 al 112. Fase III: Bloques del 113 al 168. Fase IV: Bloques del 169 al 224. Y, Fase V: Bloques del 225 al 280.

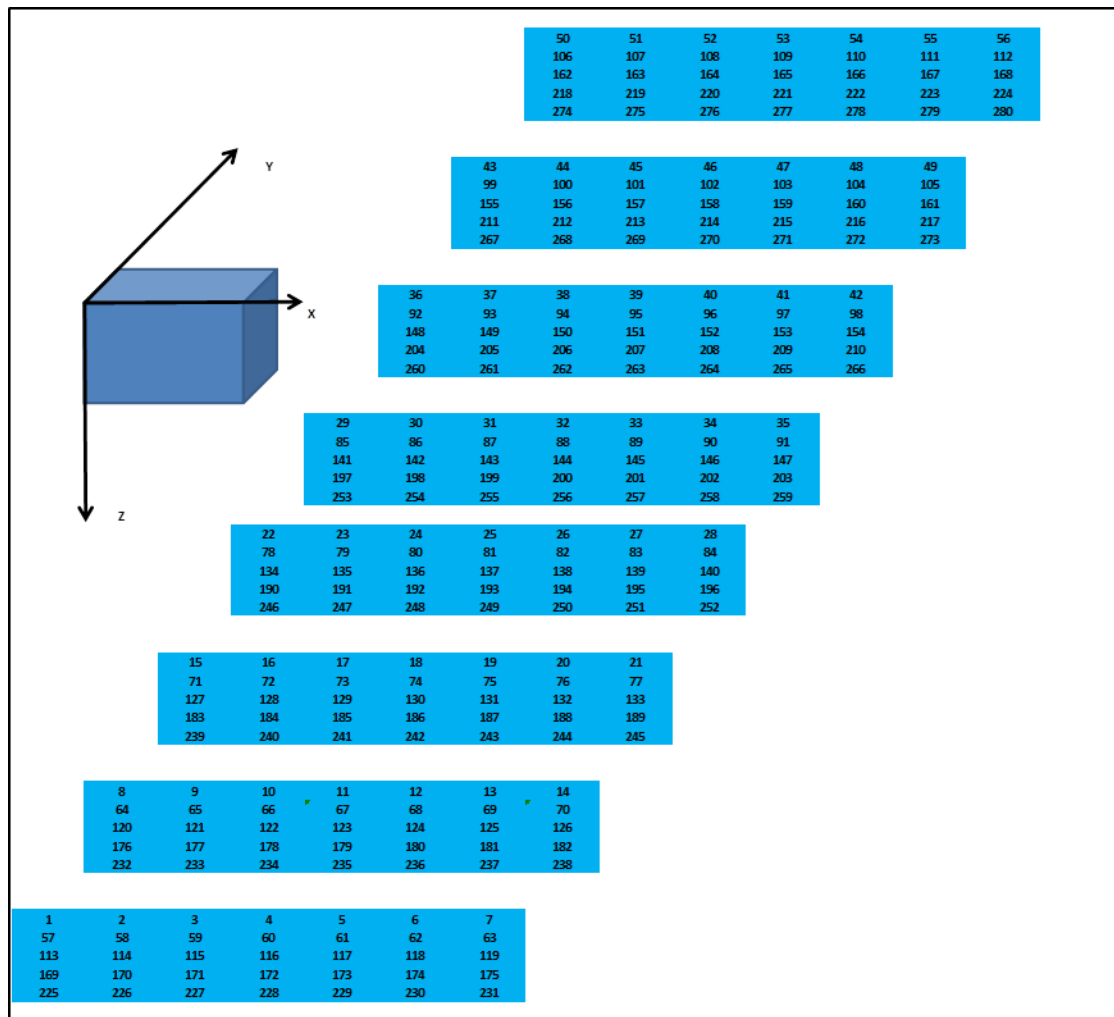


Figura 7. Distribución espacial de los bloques a ser explotados en el modelo propuesto.

Es válido anotar, que para encontrar los precios futuros del cobre, molibdeno y oro, se utilizaron los datos históricos de comercialización de estos minerales, con el fin de pronosticar sus valores futuros. Para ello se recurrió al análisis de series de tiempo utilizando @RISK tal como se describe a continuación para cada uno de los minerales que se tienen en cuenta en este modelo.

- a. Para el caso del Cobre se emplearon los precios de comercialización anuales (obtenidos de la L.M.E.) desde el año 1935 hasta el año 2014 en dólares por libra (US\$/lb). La función de serie de tiempo que servirá para encontrar los precios futuros es una **Risk BMMR** (μ, σ, α, Y_0) que genera un *Movimiento Browniano de Reversión a la Media* con los siguientes parámetros:

Se define (PALISADE, 2015):

N_t = una muestra de una distribución Normal (0, 1)

Entonces, para cualquier $t \geq 0, T > 0$,

$$Y_{t+T} = [\mu + e^{-\alpha T} (Y_t - \mu)] + N_{t+T} \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2\alpha T}}{2\alpha}}, \quad (32)$$

$$r_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + N_t \sigma \sqrt{t}, \quad (33)$$

El equivalente independiente de esto es:

$$Y_t = [\mu + e^{-\alpha} (Y_{t-1} - \mu)] + N_t \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2\alpha}}{2\alpha}}, \quad (34)$$

La media y varianza condicionales de Y_{t+T} dado Y_T , son

$$E(Y_{t+T}) = \mu + e^{-\alpha T} (Y_t - \mu) \rightarrow \mu \text{ con } T \rightarrow \infty, \quad (35)$$

y

$$Var(Y_{t+T}) = \sigma^2 \frac{1 - e^{-2\alpha T}}{2\alpha} \rightarrow \frac{\sigma^2}{2\alpha} \text{ con } T \rightarrow \infty, \quad (36)$$

Y para el caso de estudio de los precios del Cobre, se tiene:

Término largo μ : 450.38

Parámetro de volatilidad σ : 27.049

Parámetro de velocidad de reversión α : 0.010427

Valor Y_0 en tiempo 0: 311.25

- b. En el Molibdeno se incluyeron los valores de precios de comercialización anuales (obtenidos de la L.M.E) entre el año 1975 al año 2014 en dólares por libra (US\$/lb). La función de serie de tiempo que servirá para encontrar los precios futuros es una **Risk BMMR** (μ, σ, α, Y_0) que genera un *Movimiento Browniano de Reversión a la Media* con los siguientes parámetros:

Se define (PALISADE, 2015):

N_t = una muestra de una distribución Normal (0, 1)

Entonces, para cualquier $t \geq 0, T > 0$,

$$Y_{t+T} = [\mu + e^{-\alpha T}(Y_t - \mu)] + N_{t+T}\sigma\sqrt{\frac{1-e^{-2\alpha T}}{2\alpha}}, \quad (37)$$

$$r_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + N_t\sigma\sqrt{t}, \quad (38)$$

El equivalente independiente de esto es:

$$Y_t = [\mu + e^{-\alpha t}(Y_{t-1} - \mu)] + N_t\sigma\sqrt{\frac{1-e^{-2\alpha t}}{2\alpha}}, \quad (39)$$

La media y varianza condicionales de Y_{t+T} dado Y_T , son

$$E(Y_{t+T}) = \mu + e^{-\alpha T}(Y_t - \mu) \rightarrow \mu \text{ con } T \rightarrow \infty, \quad (40)$$

y

$$Var(Y_{t+T}) = \sigma^2 \frac{1-e^{-2\alpha T}}{2\alpha} \rightarrow \frac{\sigma^2}{2\alpha} \text{ con } T \rightarrow \infty, \quad (41)$$

Y para el caso de estudio de los precios del Molibdeno, se tiene:

Término largo μ : 9.3415

Parámetro de volatilidad σ : 5.9831

Parámetro de velocidad de reversión α : 0.25932

Valor Y_0 en tiempo 0: 11.39

- c. Para el caso del Oro se usaron los precios de comercialización anuales (obtenidos de la L.M.E) desde el año 1950 al año 2014 en dólares por onza troy (US\$/oz). La función de serie de tiempo que servirá para encontrar los precios futuros es una **RiskARMA11** ($\mu, \sigma, a_1, b_1, Y_0, \varepsilon_0$) que genera un proceso de *Promedio Móvil Autorregresivo de Primer Orden (ARMA11)* con los siguientes parámetros:

Se define (PALISADE, 2015):

N_t = una muestra de una distribución Normal (0,1)

$$\varepsilon_t = \sigma N_t, \quad (42)$$

Luego

$$(Y_t - \mu) = a_1(Y_{t-1} - \mu) + b_1\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (43)$$

La media y la varianza son

$$E(Y_t) = \mu, \quad (44)$$

y

$$Var(Y_t) = \sigma^2 (1 + b_1^2 + 2a_1b_1)/(1 - a_1^2), \quad (45)$$

Y para el caso de estudio de los precios del Oro, se tiene:

Media μ : 486.39

Parámetro de volatilidad σ : 78.305

Coeficiente autorregresivo de promedio móvil a_1 : 0.94956

Coeficiente autorregresivo de promedio móvil b_1 : 0.5653

Valor Y_0 en tiempo 0: 1266.4

Término de error inicial ε_0 : 19.636

En las Tablas 11 y 12 se establecen las entradas con sus respectivos datos y supuestos para la aplicación del modelo propuesto en el acápite 3.2. Las unidades financieras de este modelo propuesto están dadas en dólares americanos. Es válido anotar que lo que encuentra en cursivas en las siguientes tablas se muestra como un aporte de esta investigación.

Símbolo	Explicación	Unidades	Mina hipotética
m(i)	Costo de explotar o minar el bloque i.	\$/tonelada de material.	4.11
C(p)	Costo de procesamiento.	\$/tonelada de mineral.	5.22
CFLOT	Costos de flotación colectiva.	\$/tonelada.	0.39
r(k)	Costo de flotación selectiva del mineral k.	\$/tonelada.	0.12 para Cu 0.12 para Mo 0.12 para Au
f	Costos fijos o por periodo.	M\$/año.	555.45
CINCM / CDECM	<i>Costos de incrementar y costos de desmontar capacidad de mina.</i>	\$/tonelada.	4.11
CINCR / CDECR	<i>Costos de incrementar y costos de desmontar capacidad de refinación.</i>	\$/tonelada.	1.24
CINCC(p) / CDECC(p)	<i>Costos de incrementar y costos de desmontar capacidad de proceso p.</i>	\$/tonelada.	5.97
Cw	Costo de enviar al estéril.	\$/tonelada.	0.20
Cs	<i>Costo de enviar a pila de almacenamiento.</i>	\$/tonelada.	0.10
Csp	<i>Costo de enviar de pila de almacenamiento al proceso.</i>	\$/tonelada.	0.10
d	Tasa de descuento.	Porcentaje, %.	0.08
Mo	Capacidad inicial de minar.	Toneladas/año.	206.955 kt/a

Co (p)	Capacidad inicial de procesamiento del proceso p.	Toneladas/año.	40150 kt/a
Ro	Capacidad inicial de refinación.	mm lb Cu/a. mm lb Mo/a. koz Au/a.	252 M lbs Cu/a 49 M lbs Mo/a 40 kozs Au/a
Qw	Capacidad del estéril.	Toneladas.	3.400.798 kt
Qs	Capacidad de la pila de almacenamiento.	Toneladas.	78937 kt
y(p)	Factor de recuperación del proceso p.	Porcentaje, %.	100 Cu 100 Mo 100 Au
yf	Factor de recuperación de flotación colectiva.	Porcentaje, %.	100 Cu 100 Mo 100 Au
yfs(k)	Factor de flotación selectiva del mineral k.	Porcentaje, %.	86 Cu 68 Mo 47 Au
v(i)	Cantidad de material del bloque i.	Toneladas.	4675630 t

Tabla 11. Valores de entrada utilizados en el modelo propuesto.

Variables aleatorias (también son datos):

Símbolo	Explicación	Unidades
Y(i,k)	Ley del bloque i del mineral k Sigue funciones de distribución específicas, 1 por cada mineral o principal presente en el yacimiento.	
S (o,t)	Precio del mineral (<i>pronóstico a partir de ajuste de un modelo de serie de tiempo a datos históricos</i>).	(\$/lb, \$/lb o \$/oz).

Tabla 12. Definición de variables aleatorias que se utilizaron de entrada al modelo.

4.2. Principales resultados de la Optimización.

En la Tabla 13 y en la Figura 9, se puede apreciar el resumen de la optimización utilizando los parámetros, variables, supuestos y funciones definidas en las tablas anteriores. Dicha validación del modelo se realizó utilizando *RISKOptimizer de Palisade*.

Meta	
Función objetivo	VPN
Estadístico a optimizar	Media
Tipo de meta	Máximo
Resultados	
Mejor valor encontrado (US\$)	1,877E+010
Tiempo para encontrar mejor valor (h:min:s)	10:08:52

Tabla 13. Optimización de @RISK (RISKOptimizer) para el caso de estudio.

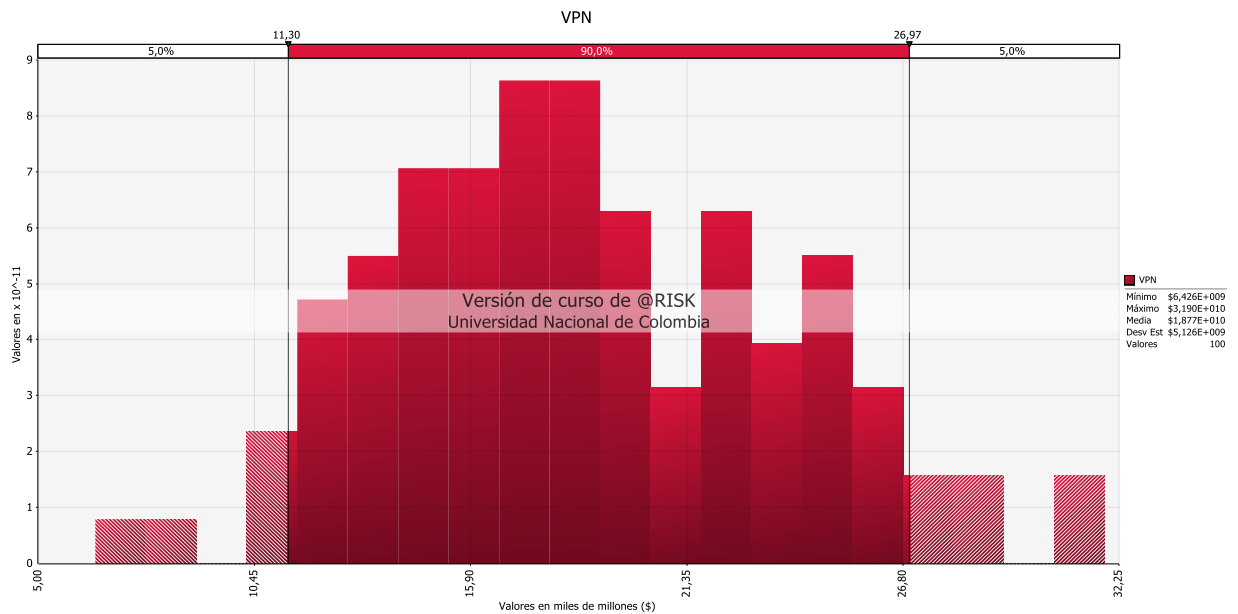


Figura 8. Densidad de probabilidad del VPN del caso de estudio.

En la Figura 9 puede apreciarse que es posible obtener con un nivel de confianza del 95% que el caso de estudio alcance un $VPN > US\$11,3 \times 10^6$ $VPN < US\$26,97 \times 10^6$. Adicionalmente, que con los valores definidos en el modelo propuesto se obtienen valores positivos para el VPN del caso de estudio para la refinación de Cobre, Oro y Molibdeno.

4.3. Análisis de Resultados:

a. Valor Presente Neto (VPN):

En la Tabla 14 se pueden apreciar los valores mínimos, máximos y la desviación estándar, del modelo de optimización estocástico. Los valores arrojados por el modelo estocástico se comparan con los del modelo determinístico en los que las variables aleatorias se reemplazaron por su valor esperado.

	Modelo Estocástico
Media	\$1,877E+010
Máximo	\$3,190E+010
Mínimo	\$6,426E+009
Desviación	\$5,126E+009

Tabla 14. Valores del VPN, máximo, mínimo y desviación para el modelo estocástico. El VPN determinístico se encuentra en el Anexo A.

Es válido anotar, que bajo los parámetros definidos en ambos casos (En el estudio de caso y en el Anexo A) y descritos a lo largo de esta investigación, la optimización estocástica arroja mejores resultados bajo una comparación del VPN mínimo con un incremento muy significativo, corroborando de esta manera las bondades de realizar procesos de planeamiento minero, utilizando métodos alternativos a los estocásticos que tradicionalmente la industria minera acude para explotar sus recursos minerales y para mejorar las condiciones del negocio minero.

El valor obtenido de la desviación estándar es muy alto lo que expone la explotación minera a cielo abierto para el yacimiento polimetálico que se analiza en esta investigación a un alto riesgo. Vale la pena preguntar desde la óptica de la empresa dueña del proyecto minero, ¿hasta dónde están dispuestos a perder valor esperado a cambio de no exponerse a un riesgo tan alto? Para ayudar a responder esta pregunta, en la Figura 10, se presenta la función de intercambio entre el Valor Presente Neto y la Desviación Estándar. Cada punto encontrado en la figura se halla de la siguiente manera: Maximizar Valor esperado de VPN, sujeto a desviación estándar \leq desviación meta (incluyendo, además, todas las restricciones originales). La desviación meta va cambiando entre 0 y 5,12E9. Obviamente, cada punto implica unas decisiones de explotación diferentes.

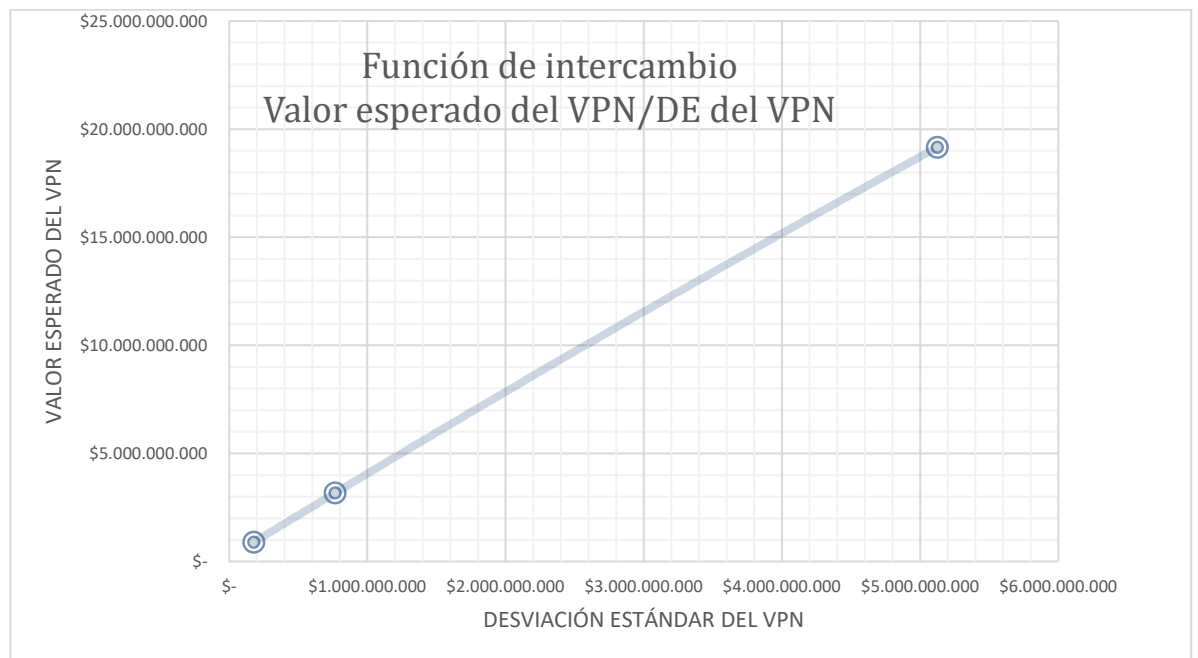


Figura 10. Función de intercambio entre el valor esperado del valor presente neto y la desviación estándar del valor presente neto.

De la Figura 10, se pueda apreciar que si la empresa dueña del proyecto minero en estudio quisiera disminuir considerablemente la desvaicion debe sacrificar muchísimo en valor esperado, así que quizá mediante política estratégica de empresa se decida asumir una desviaicon intremedia, sin tener que exponerse demasiado al riesgo pero tampoco sacrificando demasiado en valor eperado.

b. Bloque más profundo que se explota en tiempo t y vida la mina (T):

A partir de los resultados de la optimización para el modelo estocástico, obtenidos en la Tabla 15, se puede apreciar que solamente se explotará el yacimiento del caso de estudio hasta la fase II y cuyo bloque más profundo es el bloque 63.

Año	Modelo	
	Determinístico	Estocástico
1	10	6
2	14	37
3	16	7
4	15	8
5	29	45
6	38	14
7	54	16
8	8	15
9	36	31
10	37	29
11	13	35
12	6	63
13	45	44
14	28	30
15	7	36

Tabla 15. Modelos determinístico y estocástico para la definición del bloque más profundo que se explota en el tiempo t y para la vida la mina (T).

Lo anterior, se evidencia posiblemente, a las condiciones de entrada del modelo y aspectos económicos que permiten explotar este yacimiento polimetálico solamente hasta la Fase II. Es probable que ante un cambio o mejora en las condiciones de entrada (menor tasa de descuento, mejores precios de comercialización para los minerales de estudio, menores costos de explotación, entre otros), la optimización de esta explotación pueda realizarse hasta la Fase V y de esta manera aprovechar al máximo los contenidos de minerales valiosos presentes. Vale la pena anotar, que en los últimos tres años algunos de los precios de comercialización de los minerales de estudio han tenido unas caídas considerables en su cotización. No se puede dejar de lado, que a medida que se profundiza el yacimiento mineral, los valores o leyes de Mo, Cu y Au disminuyen considerablemente. En la Figura 11 se muestra el secuenciamiento para la explotación de los macrobloques del caso de estudio a lo largo de la T de 15 años. Adicionalmente, para el caso del modelo base o modelo determinístico, la vida de la mina es 15 años explotando hasta el bloque 7. Mientras que para el caso del modelo estocástico, la LoM es 15 años explotando hasta el bloque 36.

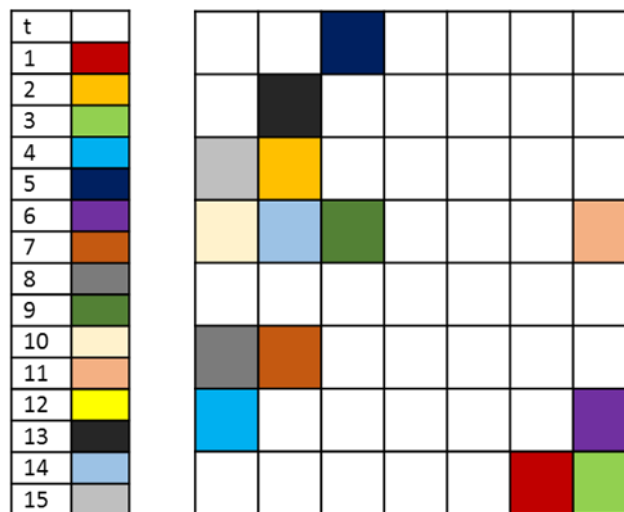


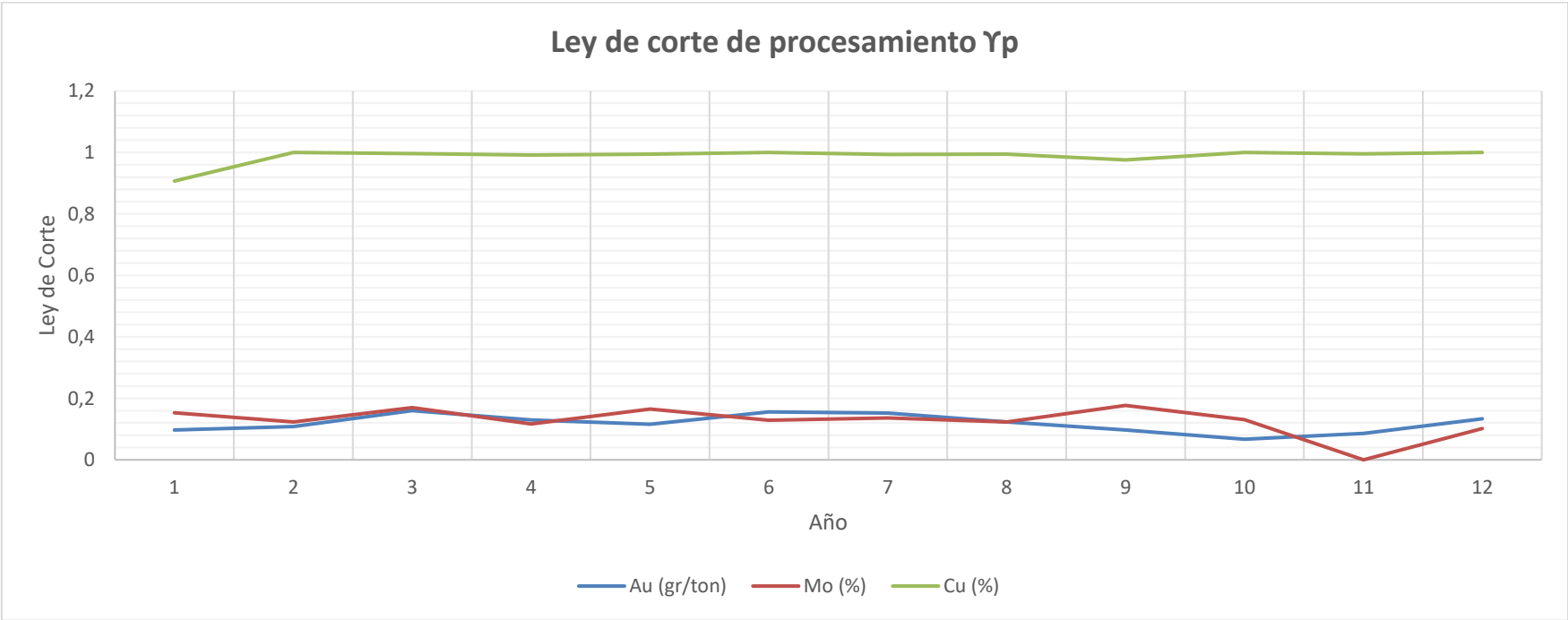
Figura 11. Secuenciamiento en planta para la explotación de los macrobloques del caso de estudio a lo largo de la LoM de 15 años.

Vale la pena mencionar que para el modelo determinístico se define una capacidad de la mina de 567.000 TPD, mientras que para el modelo propuesto en esta investigación se tendrá una capacidad de mina de 466.717 TPD (teniendo en cuenta las dimensiones de los macrobloques), arrojando menores valores de minado debido a los procesos de selectividad del material a explotar.

c. Ley de corte de procesamiento Υ_p :

Año Mineral	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Au (gr/ton)	0,097	0,108	0,160	0,130	0,116	0,156	0,152	0,123	0,097	0,067	0,086	0,133
Mo (%)	0,153	0,123	0,170	0,117	0,165	0,129	0,136	0,123	0,177	0,131	0,000	0,102
Cu (%)	0,907	1,000	0,996	0,992	0,994	1,000	0,993	0,994	0,976	1,000	0,995	1,000

Tabla 16. Ley de Corte de procesamiento (Υ_p) para la optimización del caso de estudio.

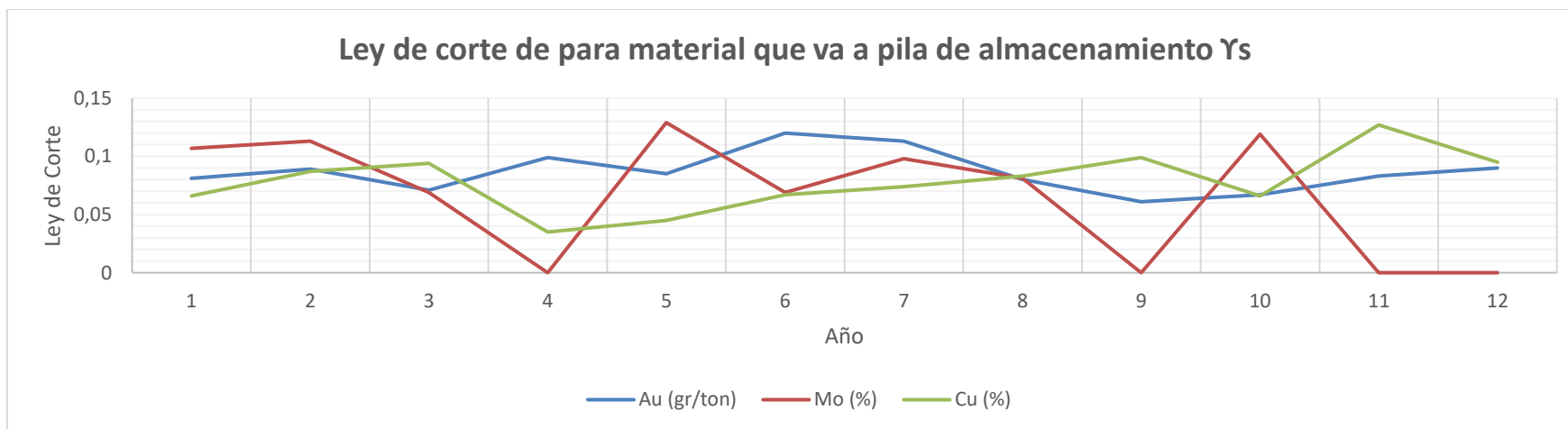


De la Tabla 16 se puede apreciar que la ley de corte de procesamiento Y_p tanto para oro como molibdeno no muestra grandes variaciones a lo largo de la explotación del depósito polimetálico, es posible suavizar el efecto (mediante restricciones que impliquen cambios máximos entre dos periodos definidos por la empresa) para el caso del molibdeno durante el año 11, ya que, los resultados arrojan que durante ese año y para el bloque a explotar no se encuentra dicho material disponible y susceptible de ser explotado. De igual forma para el caso del cobre, se puede suavizar el efecto de los valores tan bajos o el cambio tan abrupto durante los años 13 y 14, con el fin de no enviar estos valores de bajas de leyes de corte para la etapa subsiguiente o de beneficio mineral, con una restricción definida por la empresa que permita cambios máximos en dos periodos consecutivos.

d. Ley de corte de para material que va a pila de almacenamiento Y_s :

Año Mineral	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Au (gr/ton)	0,081	0,089	0,071	0,099	0,085	0,120	0,113	0,080	0,061	0,067	0,083	0,090
Mo (%)	0,107	0,113	0,069	0,000	0,129	0,069	0,098	0,081	0,000	0,119	0,000	0,000
Cu (%)	0,066	0,087	0,094	0,035	0,045	0,067	0,074	0,083	0,099	0,066	0,127	0,095

Tabla 17. Ley de Corte del material que va a la pila de almacenamiento (Y_s) para la optimización del caso de estudio.



Teniendo en cuenta la Tabla 17, para la ley de corte del material que va para pila de almacenamiento, existen 5 valores para el molibdeno iguales a cero en diferentes periodos, la implica que todo el material explotado se va para el procesamiento o beneficio del mismo, sin dejar material en las pilas de almacenamiento para los años 4, 9, 11, 12 y 13, respectivamente. Para el caso del oro se encuentra una ley de corte que tiene un comportamiento suavizado y no tiene valores iguales o cercanos a cero para ningún año de explotación. De igual forma el cobre tiene valores con de leyes de corte de material que va para pila de almacenamiento que no sufren fuertes cambios, lo que garantiza la disponibilidad de este mineral para ser explotado.

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES

Se describen a continuación las conclusiones de esta investigación, así como las recomendaciones para el trabajo futuro en el área de optimización estocástica para explotaciones mineras a cielo abierto.

En planificación minera a largo plazo

Desde hace unas décadas, la planificación minera se apoya de modelos matemáticos de optimización a largo plazo que, por su alta dimensionalidad y por su naturaleza estocástica, son bastante complejos de resolver. Diversos investigadores han definido importantes avances en la inclusión de más elementos de la realidad, en el manejo del riesgo y en su manejo computacional (más rápido, con menos recursos y mejores soluciones). Sin embargo, aún queda mucho por avanzar y el modelo desarrollado en esta investigación constituye un aporte en ese camino. Entre más complejidades se superen, se alcanza mayores beneficios y menor exposición al riesgo.

El modelo desarrollado considera que:

El yacimiento es polimetálico, que es una situación muy frecuente en la mayoría de las minas del mundo: debido a esto las variables de decisión de Ley de Corte son

específicas a cada uno de los minerales (v.g. Mo, Cu, Au) (aunque la definición de la Ley de Corte al material estéril, a pila o a proceso es única). Esta regla no tiene que ser por ejemplo un promedio de las n leyes sino una regla heurística tipo *Si, AND... OR...Entonces...* que permite la inclusión de opinión de expertos. Así, si un bloque es rico en cobre pero muy pobre en otros minerales de interés económico por ejemplo molibdeno u oro, puede haber suficiente razón para que sea explotado y procesado.

Los precios de los minerales son variables dinámicas e inciertas que, a partir de sus comportamientos históricos en el pasado (modeladas a partir de ajustes a series de tiempo teóricas) y las expectativas de expertos para el futuro, pueden incorporarse como predicciones. Con el apoyo de simulación de Montecarlo, estas predicciones tampoco son consideradas estáticas sino que son representadas por funciones de distribución de probabilidad en cada t (condicionadas a rezagos $t - k$) lo que permite evaluar miles de posibles escenarios de esos precios ante posibles configuraciones de explotación minera.

Con el apoyo de expertos se puede incluir elementos prospectivos (que servirán de ayuda para el planeamiento minero a largo plazo), como simular una fuerte e intempestiva caída del precio de cobre, molibdeno, oro, u otros “cisnes negros”, manipulando los parámetros de la serie de tiempo.

La Ley de Corte es una variable dinámica en el tiempo $\gamma_g(o,t)$ que va cambiando, para cada periodo de tiempo, dependiendo de las predicciones del precio de los minerales.

Existe además, más de una Ley de Corte, por ejemplo, una para definir el material que se envía a estéril y otra (u otras) para clasificación en pilas de almacenamiento, en espera de mejores oportunidades económicas o tecnológicas.

Las capacidades tecnológicas (de explotación, de molienda, refinación, etc.) no son constantes definidas a priori e inalterables a lo largo de la vida de la mina o *LoM*, independiente de si convendría adquirir mejor tecnología y maquinaria o vender o transferir a otros negocios mineros: en el modelo desarrollado en esta investigación, estas capacidades son también variables de decisión con un costo adicional de adquisición o desmonte según la fortaleza óptima de esas decisiones.

El modelo incluye varios elementos en el proceso productivo integral de explotación minera: desde la explotación del pit, el envío a pilas de almacenamiento temporales, el envío a molienda y demás procesos de refinación, hasta el mercado final.

La vida útil de la mina no es un parámetro conocido a priori sino una variable de decisión que delimita el momento en el cual la explotación de la mina dejaría de ser rentable. Para el caso del modelo desarrollado en esta investigación, se encontró que la vida útil de la mina o *LoM* es equivalente a 15 años, con las condiciones geológicas, técnicas y de mercado definidas. Es importante resaltar, que para hallar este valor de la *LoM* no se utilizó el modelo establecido por *Taylor*, sino que se definió la variable tiempo como una variable de decisión del modelo de optimización estocástica, lo que permite dar un paso adelante en la estimación de este tipo de parámetros que se utilizan de manera recurrente en los procesos de planeamiento minero.

El modelo desarrollado constituye entonces un avance significativo para la planificación real de las minas a cielo abierto, ya que se analizó uno de los problemas más complejos en la industria minera, como lo es en el planeamiento minero la estimación de la Ley de Corte de depósitos polimetálicos, usando optimización estocástica implícita.

En manejo de incertidumbre:

El modelo considera incertidumbre geológica (leyes) e incertidumbre económica (precios y costos tecnológicos). Aunque muchos modelos en la literatura ya lo hacen, algunos de ellos consideran como referentes solo los valores esperados o una serie finita y corta de posibles escenarios.

El modelo desarrollado asume una manera explícita de enfrentar el riesgo en la optimización: considera no solo los valores esperados, sino todos los posibles valores de esas variables inciertas mediante sus funciones de distribución de probabilidad, obtenidas a partir de datos históricos o evaluación de expertos (lo que permite incorporar análisis prospectivo de posibles cambios radicales de escenarios o aparición de “cisnes negros” como por ejemplo cambios drásticos en el precio del cobre, molibdeno u oro). Al integrar simulación de Montecarlo puede analizar miles de posibles escenarios (combinaciones de diferentes valores de las variables inciertas) y evaluar posibles decisiones en cada uno de esos escenarios. Permite así, no solo valorar el costo o beneficio esperado, sino todos los otros posibles valores como sus valores más pesimistas o más optimistas, su varianza (con la cual se estima el riesgo), la probabilidad de pérdida, la probabilidad de obtener una meta específica de la empresa, etc., permitiendo no sólo maximizar los beneficios esperados sino también minimizar

el riesgo al que se somete con una posible decisión o incluir muchos otros criterios de incertidumbre (como mini-max, minimizar arrepentimientos, etc.).

Como las posibles decisiones de secuenciamiento de la explotación, de la ley de corte, etc. son muchísimas, constituyendo así un problema combinatorial (*NP-Hard*), el modelo se apoya desde la Inteligencia Artificial de la herramienta de modelación Algoritmos Genéticos, que de manera “inteligente” chequea solo un número pequeño de posibilidades, pero garantizando que encuentra una solución quasi-óptima (u óptima si se puede contar con un mayor tiempo de corrida).

En modelación

Al intentar dar solución al problema del planeamiento minero, muchos de los modelos de la literatura enfocan sus esfuerzos en aumentar el número de bloques que puede afrontar el problema en tiempos computacionales prácticos. Esto debido a que, en esos modelos, existe una variable de decisión binaria por cada bloque y por cada tiempo, es decir el problema considera $n*t$ variables binarias (en el caso presentado 280 bloques en un periodo de 15 años, $280*15 = 4200$ variables binarias, respectivamente) lo que constituye un modelo combinatorial de gran escala, muy difícil de resolver por técnicas clásicas e incluso metaheurísticas. Igualmente, con ese enfoque clásico, las restricciones de precedencias de explotación de bloques son muchísimas, una por cada bloque en cada t , es decir también $n*t$ restricciones (en el caso presentado $280*15 = 4200$ restricciones).

La formulación del modelo desarrollado en esta investigación redujo enormemente el número de variables de decisión a solo t variables de bloques (en el caso presentado

solo 15 variables enteras) y las restricciones de precedencia no se incluyen porque ya están incorporadas en las decisiones a tomar, es decir, cada solución propuesta por el Algoritmo Genético (todo un cono de explotación, en vez de un solo bloque) implícitamente ya las cumple. Esto hace que el costo computacional requerido sea mucho menor, aumente la posibilidad de conseguir buenas soluciones, se pueda abordar minas muchísimo más grandes o dividir en un número de bloques más pequeños para volver más realista el problema, y al reducir el costo computacional se puede incluir otras complejidades que no le eran permitidos a muchos de los modelos anteriores porque todo su esfuerzo computacional se concentraba en el manejo del excesivo número de variables binarias.

Tanto, la nueva representación de las variables de decisión (ya no binarias sino enteras que identifican conos), como la inclusión de funciones no lineales, como *min*, *max*, *or*, *and*, *etc.*, y la interacción con simulación de Montecarlo para el manejo de la incertidumbre, se lo permite el uso de la técnica de optimización de Inteligencia Artificial Algoritmos Genéticos, que a diferencia de las técnicas clásicas de optimización, no excluyen todo este tipo de elementos matemáticos.

Recomendaciones para el Trabajo Futuro

Se hace necesario estimar el impacto que pueda tener en el modelo propuesto en esta investigación, un modelo de bloques que se acerque a la realidad técnica y operativa (para dar solución a un problema de minería de tamaño real) del caso de estudio analizado, es decir, establecer el VPN del negocio minero ante optimizaciones de bloques más pequeños que los utilizados.

Partiendo de las realidades actuales que experimenta la industria minera mundial (bajos precios, yacimientos con leyes menores, restricciones ambientales y sociales, entre otros), es necesario definir modelos de costos alternativos que permitan establecer las diferentes relaciones e implicaciones que tienen los ciclos de precios de los commodities al momento de encontrar el flujo de caja de estos proyectos mineros. Estos modelos alternativos de costos, pueden ser entre otros, el modelo de costos basados en actividades (*Activity Based Costing System*). Adicionalmente, se recomienda analizar el efecto que pueda tener en la estimación del VPN las correlaciones que existan entre los precios de los minerales de interés en este caso de estudio como lo son el oro, el cobre y el molibdeno.

Para complementar la investigación, y con el objetivo de encontrar resultados más cercanos a la realidad de ocurrencia e incertidumbre geológica de los yacimientos polimetálicos, es menester tener en cuenta el modelo de variograma, la simulación directa de bloques, la simulación secuencial *Gausiana* y el hallazgo de los elipsoides de continuidad (X, Y y Z). Adicionalmente, se recomienda hacer una comparación de

la Simulación Condicional con la propuesta definida en esta investigación al momento de incluir la incertidumbre geológica de los bloques susceptibles de ser explotados.

Es necesario investigar y analizar en el marco del proceso integral o global minero, otras reglas de decisión, que permitan un acercamiento a generar mayor valor a los procesos extractivos de las operaciones mineras a cielo abierto y que puedan ayudar a resolver preguntas: ¿Qué pasa si...?, ¿Cuál es la mejor alternativa de...?, entre otras.

Finalmente, y con la meta de lograr un modelo de optimización estocástica más robusto y que conlleve a una acertada toma de decisiones, es necesario tener en cuenta objetivos ambientales que permitan valorar los diferentes impactos y externalidades, tanto positivos como negativos, para ser tenidos en cuenta en la modelación financiera del proyecto minero a cielo abierto para un depósito polimetálico.

ANEXOS

Anexo A: Caso base

En la Figura 12, se presenta el comportamiento del VPN para el caso base. Para la optimización del modelo determinístico, este se llevó a cabo utilizando *Evolver 7.1* para un total de 24947 pruebas, en un tiempo total de optimización de 6h 36min 40s y cuyo mejor valor encontrado fue de \$1.744'293.056.

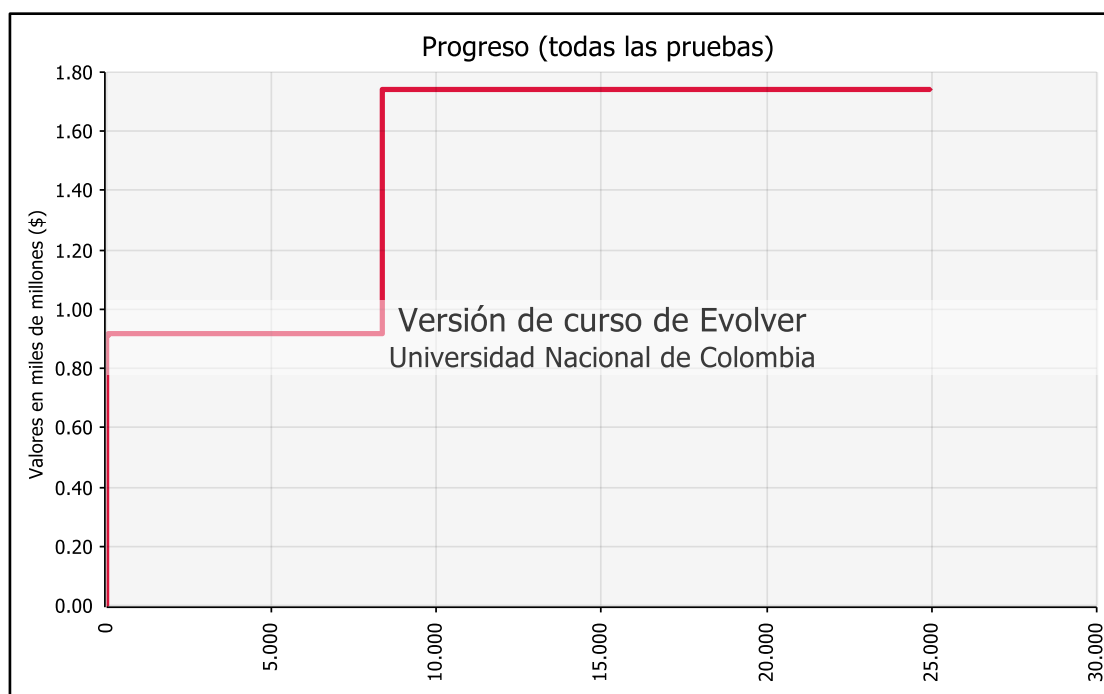


Figura 9. Comportamiento del VPN para el caso base.

De la Figura 10 se puede apreciar que luego de aproximadamente 8000 pruebas el mejor valor encontrado del VPN no cambió y se mantuvo constante alcanzando un valor hasta el final de la prueba 24947 de aproximadamente US\$ 1,7 miles de millones.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abdel-Sabour, S. & Dimitrakopoulos, R., 2011. Incorporating geological and market uncertainties and operational flexibility open pit mine design. *Journal of Mining Science*, 47(2), pp. 191-201.

Abdel, S. & Dimitrakopoulos, R., 2010. *Mine Design under Geologic and Market Uncertainties. MININ 2010 Proceeding of the 4th International Conference on Mining Innovation*. Santiago de Chile, GECAMIN.

Albor Consuegra, F. & Dimitrakopoulos, R., 2009. Stochastic mine design optimisation based on simulated annealing: pit limits, production schedules, multiple orebody scenarios and sensitivity analysis. *Mining Technology: Transactions of the Institutions of Mining and Metallurgy: Section A*, 118(2).

Arroyo, C., Marinho, A. & Goncalves, J., 2014. *Análise de Risco dos Teores de Ferro em Planos de Lavra Mensais e Anual de uma Mina em Operação*. Bello Horizonte, 8° Congresso Brasileiro de Mina a Céu Aberto.

Asad, M., 2005. Cutoff grade optimization algorithm with stockpiling option for open pit mining operations of two economic minerals. *International Journal of Surface Mining, Reclamation and Environment*, 19(3), pp. 176-187.

Asad, M. & Dimitrakopoulos, R., 2013. *A Heuristic Approach to Stochastic Cutoff Grade Optimization for Open Pit Mining Complexes*, Quebec: Les Cahiers du GERAD.

Asad, M. & Dimitrakopoulos, R., 2013. A heuristic approach to stochastic cutoff grade optimization for open pit mining complexes with multiple processing streams. *Resources Policy*, 38(1), pp. 591-597.

Bascetin, A. & Nieto, A., 2007. Determination of optimal cut-off grade policy to optimize NPV using a new approach with optimization factor. *The Journal of The Southern African Institute of Mining and Metallurgy*, 107(1), pp. 87-94.

Bascetin, A., Tuylu, S. & Nieto, A., 2011. Influence of the ore block model estimation on the determination of the mining cutoff grade policy for sustainable mine production. *Environmental Earth Science*, 64(1), pp. 1409-1418.

Bastante, F., Taboada, J. & Ordóñez, C., 2004. Design and planning for slate mining using optimisation algorithms. *Engineering Geology*, 73(1-2), pp. 93-103.

Benndorf, J. & Dimitrakopoulos, R., 2013. Stochastic long-term production scheduling of iron ore deposits: Integrating joint multi-element geological uncertainty. *Journal of Mining Science*, 49(1), pp. 68-81.

Birge, J. & Louveaux, F., 1997. *Introtuction to stochastic programming*. First ed. New York: Springer-Verlag.

Boland, N., Dumitrescu, I., Froyland, G. & Gleixner, A., 2009. LP-based disaggregation approaches to solving the open pit mining production scheduling problem with block processing selectivity. *Computers & Operations Research*, Issue 36, p. 1064 – 1089.

Botin, J., del Castillo, M. & Guzman, R., 2013. A real options application to manage risk related to intrinsic variables of a mine plan: A case study on Chuquicamata underground mine project. *Journal of the Southern African Institute of Mining and Metallurgy*, Volumen 113, pp. 583-592.

Botin, J., Guzman, R. & Smith, M., 2011. A methodological model to assist in the optimization and risk management of mining investment decisions. *DYNA*, 78(170), pp. 221-226.

Botin, J., Valenzuela, F., Guzman, R. & Monreal, C., 2015. A methodology for the management of risk related to uncertainty on the grade of the ore resources. *International Journal of mining reclamation and environment*, 29(1), pp. 19-32.

Caccetta, L. & Hill, S., 1999. *Optimization Techniques for open pit mine scheduling. International congress on modelling and simulation*. Perth, Australia, Curtin University of Technology, pp. 895-900.

Dagdelen, K., 1992. *Cutoff grade optimization*. s.l., 23rd APCOM Proceedings.

Darling, P., 2011. *SME Mining engineering handbook*. Society for Mining, Metallurgy & Exploration ed. USA: SME.

Denby, B. & Schofield, D., 1995. Inclusion of risk assessment in open pit design and scheduling. *IMM Transactions*, 104(1), pp. A67-A71.

Dimitrakopoulos, R., 1998. Conditional simulation algorithms for modelling orebody uncertainty in open pit optimisation. *International Journal of Surface Mining, Reclamation and Environment*, 12(4), pp. 173-179.

Dimitrakopoulos, R., 2010. *Stochastic mine planning - Methods, examples and value in a uncertain world*. Perth, Australasian Institute of mining and metallurgy.

Dimitrakopoulos, R., 2011. Stochastic optimization for strategic mine planning: A decade of developments. *Journal of Mining Science*, 47(2), pp. 138-150.

Dimitrakopoulos, R., Martinez, L. & Ramazan, S., 2007. A maximum upside / minimum downside approach to the traditional optimization of open pit mine design. *Journal of Mining Science*, 43(1), pp. 73-82.

Franco, G., Branch, J. & Jaramillo, P., 2012. Planeamiento de minas a cielo abierto mediante optimización estocástica. *Boletín de ciencias de la tierra*, 1(31), pp. 107-113.

Franco, G. & Velilla, D., 2014. Planeamiento minero como función de la variación de la ley de corte crítica. *Boletín de ciencias de la tierra*, 35(1), pp. 25-30.

Hotelling, H., 1931. The economics of exhaustible resources. *The journal of political economy*, 39(2), pp. 137-175.

Hustrulid, W., Kuchta, M. & Randall, M., 2013. *Open pit mine planning and design*. Third Edition ed. London, UK: Taylor and Francis plc.

Jélvez, E., Morales, N., Nancel-Penard, P. & Peypouquet, J., 2016. Aggregation heuristic for the open-pit block scheduling problem. *European Journal of Operational Research*, Issue 249, p. 1169–1177.

King, B., 2011. Optimal mining practice in strategic planning. *Journal of Mining Science*, 47(2), pp. 247-253.

Koushavand, B., 2014. *Long-Term Mine Planning in Presence of Grade Uncertainty*, Edmonton, Alberta: Department of Civil and Environmental Engineering, Alberta University. PhD Thesis.

Koushavand, B., Askari-Nasab, H. & Deutsch, C., 2014. A linear programming model for long-term mine planning in the presence of grade uncertainty and a stockpile. *International Journal of Mining Science and Technology*, 24(1), pp. 451-459.

Lamghari, A. & Dimitrakopoulos, R., 2012. A diversified Tabu search approach for the open-pit mine production scheduling problem with metal uncertainty. *European Journal of Operational Research*, 222(3), pp. 642-652.

Lane, K., 1964. Choosing the optimum Cut-off Grade. *Colorado School of Mines*, 59(1), pp. 485-492.

Lane, K., 1988. *The economic definition of ore: Cut-off Grades in Theory and Practice*. First ed. London: Mining Journal Books Ltd.

Lerchs, H. & Grossmann, I., 1965. Optimum design of open pit mines. *CIM Bulletin*, 58(1), pp. 47-54.

Marinho, A., 2013. *Surface Constrained Stochastic Life-of-Mine Production Scheduling*, Montreal, Canada: McGill University.

Martínez, L. & McKibben, J., 2010. *Understanding Real Options in Mine Project Valuation: A Simple Perspective*. Santiago de Chile, GECAMIN.

Michalewicz, Z. & Fogel, D., 2004. *How to solve it: Modern heuristics*. 2 ed. Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Montiel, L., 2014. *On globally optimizing a mining complex under supply uncertainty: Integrating components from deposits to transportation systems*. Montreal: Mc Gill University - PhD Thesis.

Montiel, L. & Dimitrakopoulos, R., 2013. Stochastic mine production scheduling with multiple processes: Application at Escondida Norte, Chile. *Journal of Mining Science*, 49(4), pp. 583-597.

Montiel, L., Dimitrakopoulos, R. & Kawahata, K., 2014. *Globally optimising open pit and underground mining operations under geological uncertainty*. Perth, Australia, Proceedings: Orebody modelling and strategic mine planning. The Minerals Institute, AusIMM.

Morales, N. & Reyes, P., 2016. Increasing the value and feasibility of open pit plans by integrating the mining system into the planning process. *The journal of the southern african institute of mining and metallurgy*, Volumen 116, pp. 663-672.

Newman, A. y otros, 2010. A Review of Operations Research in Mine Planning. *Interfaces*, 40(3), pp. 222-245.

Nieto, A., Bai, Y. & Brownson, J., 2014. Combined Life Cycle Assessment and Costing Analysis Optimization Model Using Multiple Criteria Decision Making in Earth-Resource Systems. *Natural resources*, 5(8), pp. 351-358.

Nieto, A. & Bascetin, A., 2006. Mining cutoff grade strategy to optimise NPV based on multiyear GRG iterative factor. *Mining Technology*, 115(2), pp. 59-64.

Nieto, A., Montaruli, V. & Cardu, M., 2013. The Strategic Importance of Nickel: Scenarios and Perspectives Aimed to Global Supply. *Transactions of the society for mining metallurgy and exploration SME*, 332(1), pp. 510-518.

Nieto, A. & Zhang, K., 2013. Cutoff grade economic strategy for by product mineral commodity operation: rare earth case study. *Mining technology*, 122(3), pp. 166-171.

PALISADE, 2015. *The Decision Tools Suite: Análisis de riesgos y decisiones (Versión 7)*. New York: PALISADE Corporation.

Picard, J., 1976. Maximal Closure of a Graph and Applications to Combinatorial Problems. *Management Science*, 22(11), pp. 1268-1272.

Rendu, J.-M., 2009. *Orebody Modelling and Strategic Mine Planning: Cut-Off Grade Estimation – Old Principles Revisited – Application to Optimisation of Net Present Value and Internal Rate of Return*. Perth, The minerals institute, Ausimm.

Rendu, J.-M., 2014. *An Introduction to Cut-Off Grade Estimation*. Second ed. Colorado: Society for Mining, Metallurgy & Exploration (SME).

Saavedra-Rosas, J., Jélvez, E., Amaya, J. & Morales, N., 2016. Optimizing open-pit block scheduling with exposed ore reserve. *The journal of the southern african institute of mining and metallurgy*, Volumen 116, pp. 655-662.

Sattarvand, J., 2009. *Long-term Open pit Planning by Ant Colony Optimization*, Aquisgran, Renania del Norte-Westfalia: RWTH Aachen University.

Soleymani, S. & Sattarvand, J., 2015. Long term production planning of open pit mines by ant colony optimization. *European Journal of Operational Research*, 240(3), pp. 825-836.

Vallejo, M., Baquero, J. & Franco, G., 2010. Análisis de los algoritmos de optimización minera: Cono flotante y Lerchs-Grossmann utilizando Gemcom Surpac y UPL. *Boletín de ciencias de la tierra*, 1(28), pp. 15-25.

Weintraub, A., Pereira, M. & Schultz, X., 2008. A Priori and A Posteriori Aggregation Procedures to Reduce Model Size in MIP Mine Planning Models. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, Volumen 30, p. 297–302.

Whittle, G., 2012. <http://www.whittleconsulting.com.au/>. [En línea] Available at: <http://www.whittleconsulting.com.au/documents/events/EO%20Brochure%20English.pdf> [Último acceso: 18 03 2014].

Winston, W., 2010. *Decision making under uncertainty with RISKOptimizer*. Second Edition ed. Ithaca, NY USA: Palisade Corporation.

Zhang, K., 2014. *Essays on mining economics and system modeling*, State College: The Pennsylvania State University-Thesis.

Zhang, K., Nieto, A. & Kleit, A., 2015. The real option value of mining operations using mean reverting commodity prices. *Journal of mineral economics*, 28(1), pp. 11-22.